

МАТЕМАТИКА С БОРИСОМ ТРУШИНЫМ

КОМБИНАТОРИКА

С НУЛЯ
ДО ОЛИМПИАД



БОМБОРА
ИЗДАТЕЛЬСТВО

МАТЕМАТИКА С БОРИСОМ ТРУШИНЫМ

КОМБИНАТОРИКА

С НУЛЯ
ДО ОЛИМПИАД



БОМБОРА
ИЗДАТЕЛЬСТВО

Москва 2023

УДК 519.1
ББК 22.141
Т80

Иллюстрация на обложку предоставлена
ООО «ФОКСФОРД».

Трушин, Борис Викторович.
Т80 Математика с Борисом Трушиным. Комбинаторика: с нуля до олимпиад / Борис Трушин. — Москва : Эксмо, 2023. — 240 с. — (Математика с Борисом Трушиным).

ISBN 978-5-04-179678-5

Борис Трушин — автор одноименного популярного канала по околошкольной математике. Эта книга написана по мотивам видеороликов, созданных автором в последние годы. Вы ближе познакомитесь с комбинаторикой и сможете разбираться в этом разделе математики без каких-либо предварительных знаний. Пройдете по увлекательному маршруту от простейших задач на перебор вариантов, через бином Ньютона и треугольник Паскаля, к сложным содержательным задачам. Если вы искали понятную книгу по математике, чтобы не надо было зубрить теоремы, а понять и прочувствовать их, то она перед вами!

**УДК 519.1
ББК 22.141**

ISBN 978-5-04-179678-5

© Борис Трушин, текст, 2023
© Оформление.
ООО «Издательство
«Эксмо», 2023

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	5
--------------------------	---

Глава 1

КОГДА НУЖНО УМНОЖАТЬ, А КОГДА — СКЛАДЫВАТЬ?	9
Простой перебор	11
Правила произведения и суммы	18
Повторяющиеся события	22
Выбор иногда уменьшает варианты	29

Глава 2

ДАВАЙТЕ ПОИГРАЕМ В СЛОВА!	37
Перестановки	39
Перестановки с повторениями	46
Бином Ньютона	54
Сумма степеней	60

Глава 3

ОТ БИНОМА ДО ТРЕУГОЛЬНИКА, И ОБРАТНО	67
Числа сочетаний	69
Задача про паучка	73
Опять бином	86
Бином решает	90

Глава 4

НЕОЖИДАННЫЕ СВЯЗИ	95
Два важных равенства	97
Подсчёт двумя способами	100
Соотношения в треугольнике Паскаля	106
Опять про сумму степеней	116

Глава 5

О ШАХМАТАХ, ШАРАХ И БУСАХ	123
Шахматы Фишера	125
Шары и перегородки	129
Комбинаторика в геометрии	133
Комбинаторика и теория чисел	142
Считай ненужное	156
Оценка плюс пример	159
Числа Фибоначчи	162
А теперь порешайте сами	165
Решения задач	172

ПРЕДИСЛОВИЕ

Всем привет! Меня зовут Борис Трушин, и я учитель математики. Я преподаю математику уже 24 года (хотя последние 14 лет в основном онлайн), и уже больше шести лет веду довольно популярный YouTube-канал «Борис Трушин» по околошкольной математике.

Многие разделы и задачи из этой книги можно найти в виде видеороликов на моём канале. Специально для тех, кому проще воспринимать информацию через видео, мы снабдили книгу QR-кодами со ссылками на соответствующие ролики.

В этой книге собран мой многолетний опыт преподавания комбинаторики школьникам разного возраста. Я попытался показать маршрут, по которому можно пройти любому, кто хочет разобраться в азах этой науки.

Если вы только начинаете интересоваться этой темой, то читайте книгу с самого начала, останавливаясь и пытаясь решать все предложенные здесь задачи. Не расстраивайтесь, если не всё получается, отложите задачу на день-два и подумайте ещё. В крайнем случае можно посмотреть подробное решение, которое можно найти для каждой задачи в конце книги.

Некоторые разделы могут быть сложны для новичков, особенно для тех, кто не привык к работе с громоздкими вычислениями. Например, раздел «Сумма степеней» из второй главы, раздел «Бином решает» из третьей или раздел «Опять про сумму степеней» из четвёртой главы. Ничего страшного не произойдёт, если вы пропустите их при первом прочтении. Это никак не повлияет на общее понимание остального текста. Но, если вы всё же рискнёте продраться через эти разделы, делайте это вместе с ручкой и листом бумаги. Хотя это пожелание относится и ко всем остальным разделам.

Если же вы уже не совсем новичок в комбинаторике, то некоторые разделы можно смело пропускать, останавливаясь лишь на задачах, которые вызывают сложности и интерес. Но учтите, что многие факты и методы здесь изложены не так, как в большинстве других книг по комбинаторике, поэтому вас могут ждать маленькие открытия даже там, где, как вам кажется, вы всё хорошо знаете.

В любом случае не рассматривайте эту книгу как лёгкое вечернее чтение. Потому что вас ждёт не только множество красивых комбинаторных фактов, идей и методов, но и полторы сотни интересных задач. А задачи не всегда удобно решать, лёжа в постели перед сном.

Те, кто разберётся со всеми рассказанными здесь фактами и методами, решат или хотя бы поймут решения всех изложенных здесь задач, уже будут понимать комбинаторику на достаточно высоком уровне. Кому-то для этого будет достаточно пары недель, а у кого-то может уйти и пара лет.

Приятного вам чтения!

Post scriptum. Хочу выразить слова благодарности всем тем, кто учил меня математике в школе и в вузе, всё, что я знаю и умею в математике и её преподавании, всё благодаря этим людям. В первую очередь это мой отец, Трушин Виктор Борисович, без которого я никогда бы не узнал и не полюбил математику. А также Терёшин Дмитрий Александрович, Петрович Александр Юрьевич, Подлипский Олег Константинович, Карасёв Роман Николаевич, Чубаров Игорь Андреевич, Балашов Максим Викторович, Курочкин Сергей Владимирович, Бесов Олег Владимирович, Половинкин Евгений Сергеевич и ещё пара десятков потрясающих учителей и преподавателей, у которых мне посчастливилось учиться. Спасибо вам, без вас бы не только не было этой книги, но не было бы меня как учителя!

Большое спасибо Константину Кнопу за то, что согласился прочесть рукопись перед публикацией. Его предложения помогли значительно улучшить некоторые разделы этой книги.

Отдельная благодарность моей жене, Елене Трушиной, за то, что взялась первой вычитать эту книгу, взглянув на неё глазами человека, который совсем не знает комбинаторики. Без её помощи в книге было бы гораздо больше мелких опечаток.

*16 августа 2023 года
Борис Трушин*

ГЛАВА 1

КОГДА НУЖНО УМНОЖАТЬ, А КОГДА — СКЛАДЫВАТЬ?

Что такое *комбинаторика*? Комбинаторикой называется раздел математики, который решает задачи подсчёта количества объектов, удовлетворяющих какому-либо свойству. Поэтому большинство задач, которые мы будем обсуждать, будут содержать один и тот же вопрос: «Сколько существует различных способов сделать *то-то*?» А начнём мы с совсем простых примеров, решение которых не требует вообще никаких знаний.

Простой перебор

Если вам нужно посчитать количество чего-то, то часто самый элементарный способ это сделать — просто перечислить все интересующие вас объекты. Главное — убедиться, что ничего не забыто. Например, если вам нужно вспомнить, сколько человек с вами учился в одном классе, то можно попробовать восстановить отсортированный по алфавиту список фамилий, записанный в журнале, а можно нарисовать, как расставлены парты в классе, и вспомнить, кто за какой партой сидит.

Давайте обсудим несколько задач, для решения которых будем пользоваться простым перебором всех возможных вариантов.

Задача 1. Каждую из четырёх клеток квадратной таблицы 2×2 можно покрасить в чёрный или белый цвет. Сколько существует различных раскрасок таблицы?

Решение. Для того чтобы не пропустить ни одной раскраски, давайте их классифицируем. Есть две одноцветные раскраски:



Есть четыре раскраски, в которых ровно одна чёрная клетка:



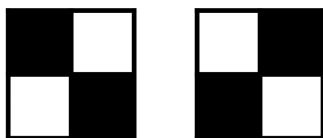
Есть четыре раскраски, в которых ровно одна белая клетка:



Среди раскрасок, в которых по две чёрные и белые клетки, есть, во-первых, четыре таких, у которых одноцветные клетки граничат по стороне:



а во-вторых, ещё две раскраски, у которых одноцветные клетки лежат на диагоналях:



Итого получаем, что существует

$$2 + 4 + 4 + 4 + 2 = 16$$

различных раскрасок таблицы 2×2 в два цвета.

Ответ. 16 раскрасок.

Задача 2. Нужно придумать код из двух букв, в котором на первом месте должна стоять согласная буква, а на втором — гласная. При этом разрешено использовать только буквы

А, Б, В, Г, Д, Е, Ё.

Сколько различных кодов можно придумать?

Решение. Попробуем выписать все возможные варианты. В качестве первой буквы можно выбрать любую из согласных:

Б, В, Г, Д.

Если возьмём «Б», то можно будет написать следующие коды:

БА, БЕ, БЁ.

Если возьмём «В», то можно написать коды:

ВА, ВЕ, ВЁ.

То же самое можно сделать с «Г» и «Д»:

ГА, ГЕ, ГЁ,
ДА, ДЕ, ДЁ.

В итоге мы получили всего 12 кодов.

Ответ. 12 кодов.

Для более удобного подсчёта можно было выписать все варианты в виде таблицы:

	А	Е	Ё
Б	БА	БЕ	БЁ
В	ВА	ВЕ	ВЁ
Г	ГА	ГЕ	ГЁ
Д	ДА	ДЕ	ДЁ

По этой таблице сразу видно, что всего может быть составлено 12 кодов и что точно посчитаны все возможные коды, удовлетворяющие условию.

Задача 3. Сколько всего существует паролей, состоящих из трёх различных цифр, если в пароле могут быть использованы только цифры 1, 2, 3, 4, 5?

Решение. Попробуем выписать все возможные коды. Давайте рассматривать пароль как трёхзначное число. И, чтобы не пропустить ни одного пароля, выпишем все пароли в порядке возрастания. Сначала будут те, у которых в разряде сотен стоит цифра 1:

123, 124, 125,
132, 134, 135,
142, 143, 145,
152, 153, 154.

Итого 12 различных паролей.

Потом будут те, у которых в разряде сотен стоит цифра 2:

213, 214, 215,
231, 234, 235,
241, 243, 245,
251, 253, 254.

И их снова 12 штук.

Потом будут те, которые начинаются с цифры 3, потом — с цифры 4 и, наконец, те, которые начинаются с цифры 5:

312, 314, 315, 321, 324, 325, 341, 342, 345, 351, 352, 354,
412, 413, 415, 421, 423, 425, 431, 432, 435, 451, 452, 453,
512, 513, 514, 521, 523, 524, 531, 532, 534, 541, 542, 543.

В каждой сотне получилось по 12 паролей. А значит, всего во всех пяти сотнях $5 \cdot 12 = 60$ паролей.

Ответ. 60 паролей.

В этой задаче тоже можно было представить все варианты в виде таблицы, но здесь это сделать несколько сложнее:

Первая цифра	Вторая цифра	Третья цифра		
1	2	3	4	5
	3	2	4	5
	4	2	3	5
	5	2	3	4
2	1	3	4	5
	3	1	4	5
	4	1	3	5
	5	1	3	4
3	1	2	4	5
	2	1	4	5
	4	1	2	5
	5	1	2	4
4	1	2	3	5
	2	1	3	5
	3	1	2	5
	5	1	2	3
5	1	2	3	4
	2	1	3	4
	3	1	2	4
	4	1	2	3

По этой таблице видно, что всего может быть составлено 60 различных паролей.

Мы справились с этими тремя задачами простым перебором вариантов, но если бы этих вариантов было очень много, то на перебор ушло бы гораздо больше времени. С другой стороны, мы видим, что, например, во второй задаче ответ — $4 \cdot 3 = 12$, а в третьей — $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$. Давайте научимся доходить до таких ответов, не занимаясь полным перебором всех возможных вариантов.

Но перед этим попробуйте самостоятельно решить следующие задачи, используя простой перебор всех возможных вариантов.

Задача 4. Девочке мама на завтрак дала конфету, пряник и булочку. Сколько различных порядков поедания этих сладостей есть у девочки?

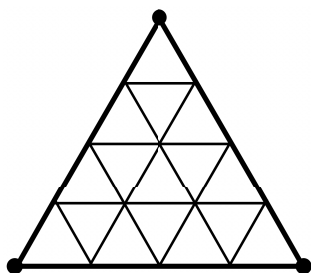
Задача 5. Монету подбрасывают три раза. Сколько разных последовательностей орлов и решек можно при этом получить?

Задача 6. Турнир по теннису проходит в один круг, то есть каждый участник турнира сыграет с каждым ровно один раз. Сколько будет проведено игр, если в турнире принимают участие восемь теннисистов?

Задача 7. У Ивана есть пять друзей — Аня, Боря, Вася, Гоша и Даша. Он хочет позвать в гости троих из них, чтобы вместе поиграть в настольную игру. Сколько существует различных способов выбрать трёх друзей из пяти?

Задача 8. Сколько существует способов представить число 10 в виде суммы трёх натуральных слагаемых? Два представления, отличающиеся порядком слагаемых, считаются различными.

Задача 9. Каждую сторону правильного треугольника разбили тремя точками на четыре равные части и соединили эти точки отрезками, параллельными сторонам треугольника.



Какое количество равносторонних треугольников можно выделить на этой картинке?

Правила произведения и суммы

Рассмотрим ещё несколько простых задач, но попробуем их решить, не делая явного перебора.

Задача 10. К девочке в гости пришла подруга, и девочка решила её чем-нибудь угостить. У себя на кухне она нашла семь разных печений и пять разных пирожных. Сколькими различными способами девочка может угостить подругу, если она хочет дать ей лишь одно пирожное и одно печенье?

Решение. Пусть девочка уже выбрала, какое печенье она даст подруге. Тогда в пару к нему она может выбрать любое из пяти пирожных. Поэтому она может сделать пять различных угощений с этим печеньем. А так как печений всего семь, то всего различных угощений будет семь раз по пять, то есть $7 \cdot 5 = 35$.

Ответ. 35 способов.

Задача 11. Девочка ещё порылась в шкафчиках на кухне и обнаружила, кроме семи печений и пяти пирожных, ещё и десять различных конфет. Сколько теперь у неё есть способов составить угощение для подруги, если она хочет дать ей одну конфету, одно печенье и одно пирожное?

Решение. Мы уже знаем, что существует 35 различных комбинаций из одного печенья и одного пирожного. Для каждой из этих комбинаций есть десять различных способов добавить конфету. Поэтому девочка может составить угощение $35 \cdot 10 = 350$ различными способами.

Ответ. 350 способов.

Задача 12. Пусть девочка, отыскав на кухне семь печений, пять пирожных и десять конфет, решила дать подруге только две какие-нибудь сладости (печенье с пирожным, пирожное с конфетой или конфету с печеньем). Сколько различных вариантов угощения она может составить?

Решение. У девочки есть три возможности выбора двух видов сладостей. Для каждой из них несложно подсчитать число вариантов:

- **печенье с пирожным:** в пару к каждому из семи печений можно дать любое из пяти пирожных, итого $7 \cdot 5 = 35$ вариантов;
- **пирожное с конфетой:** в пару к каждому из пяти пирожных можно дать любую из десяти конфет, итого $5 \cdot 10 = 50$ вариантов;
- **конфета с печеньем:** в пару к каждой из десяти конфет можно дать любое из семи печений, итого $10 \cdot 7 = 70$ вариантов.

Складывая все эти варианты, получаем, что всего $35 + 50 + 70 = 155$ различных вариантов.

Ответ. 155 вариантов.

При решении этих задач самое главное — не запутаться, когда нам нужно перемножать количества вариантов, а когда складывать. Чтобы лучше себе это уяснить, сформулируем два основных комбинаторных правила.

Правило произведения. Пусть объект A можно выбрать n способами и после каждого такого выбора объект B можно выбрать m способами. Тогда выбор пары (A, B) можно осуществить nm способами.

Например, в задаче 10 было два «объекта» — печенье и пирожное, один из объектов можно было выбрать пятью способами, второй — семью, поэтому существует $5 \cdot 7 = 35$ способов выбрать пару объектов.

Правило суммы. Пусть некоторый объект A можно выбрать n способами, а другой объект B можно выбрать m способами, и никакой из объектов A не совпадает ни с каким из объектов B . Тогда существует $n + m$ способов выбрать либо объект A , либо объект B .

Например, в задаче 12 такими «объектами» являются пары {печенье и пирожное}, {пирожное и конфета} и {конфета и печенье}.

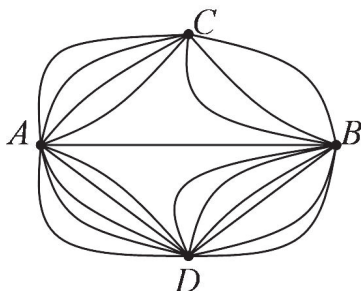
Чтобы убедиться, что вы разобрались в том, как работают эти правила, попробуйте самостоятельно решить следующие задачи.

Задача 13. Сколькими способами можно выбрать одну гласную и одну согласную буквы из слова «ЧЕТЫРЁХУГОЛЬНИК»?

Задача 14. В школе есть один основной вход и три запасных. Сколько существует способов войти, а потом выйти из здания школы?

Задача 15. На почте продаются восемь видов конвертов, 25 различных открыток и 30 видов марок. Сколькими способами можно купить конверт с открыткой и марку?

Задача 16. Из города A в город B ведёт одна дорога, в город C — четыре, в D — пять, из города C в город B — три дороги, а из D в B — шесть.



Аналогично после третьего $4 \cdot 2 = 2^3 = 8$ различных последовательностей. Каждый следующий бросок удваивает количество последовательностей. В итоге после четвёртого броска будет 2^4 , после пятого — 2^5 , ..., после десятого — $2^{10} = 1024$ различные последовательности из орлов и решек.

Ответ. 1024 последовательности.

Задача 19. Сколькими способами можно прочесть слово

КОМБИНАТОРИКА,

если начать движение из левого верхнего угла таблицы и каждый раз идти либо вправо, либо вниз?

К	О	М	Б	И	Н	А	Т	О	Р	И	К	А
О	М	Б	И	Н	А	Т	О	Р	И	К	А	
М	Б	И	Н	А	Т	О	Р	И	К	А		
Б	И	Н	А	Т	О	Р	И	К	А			
И	Н	А	Т	О	Р	И	К	А				
Н	А	Т	О	Р	И	К	А					
А	Т	О	Р	И	К	А						
Т	О	Р	И	К	А							
О	Р	И	К	А								
Р	И	К	А									
И	К	А										
К	А											
А												

Решение. У нас есть два способа добраться до буквы О:

К О
О

Какую бы из букв О мы ни выбрали, есть два способа добраться до буквы М:

О М
М

То есть каждым своим ходом мы передвигаемся на следующую диагональ — в начале были в букве К, потом оказались в одной из букв О, потом — в одной из букв М, и так далее. При этом перед очередным ходом мы можем выбрать — идти вправо или вниз. При каждой из этих двух возможностей мы вновь опускаемся на диагональ ниже и тем самым продолжаем чтение слова «КОМБИНАТОРИКА». Таким образом, способов прочесть слово «КОМБИНАТОРИКА» столько же, сколько способов 12 раз выбирать из двух вариантов — идти вправо или вниз.

$K \rightarrow O \rightarrow M \rightarrow B \rightarrow I \rightarrow H \rightarrow$
 $\rightarrow A \rightarrow T \rightarrow O \rightarrow P \rightarrow I \rightarrow K \rightarrow A$

То есть всего $2^{12} = 4096$ способов.

Ответ. 4096 способов.

При решении этих задач получается ответ вида n^m , где n и m — некоторые натуральные числа. Такой ответ получается во всех задачах, в которых требуется посчитать количество способов на каждое из m мест поставить один из n различных объектов. В таких задачах главное — не перепутать, что в какую степень следует возводить!

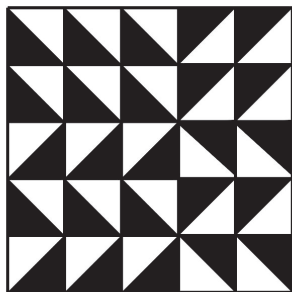
Например, в задаче 18 «местом» является номер броска, а «объектом» — сторона монеты — орёл или решка.

Заметим при этом, что в таких задачах вполне допустимо (и даже приветствуется) оставлять ответ в «степенном виде» — n^m , не доводя его до окончательной десятичной записи. Более того, так он выглядит более естественно — сразу становится ясно, каким образом он получен.

Разберём ещё одну задачу, для решения которой нужно не только знать, как считать, но сначала нужно понять, что именно считать.

Задача 20. Квадрат 5×5 разбит на единичные клетки. В каждой клетке проводят одну из диагоналей и красят один из получившихся треугольников в белый цвет, а другой — в чёрный. «Шахматной» будем называть такую раскраску, при которой любые два треугольника, имеющие общую сторону, оказываются разного цвета. Сколько существует различных «шахматных» раскрасок?




Такая «шахматная» раскраска может выглядеть, например, так:






Решение. Очевидно, что одну клетку можно раскрасить четырьмя способами — есть два способа разрезать клетку на треугольники, а после этого есть два способа покрасить эти треугольники в белый и чёрный цвета:

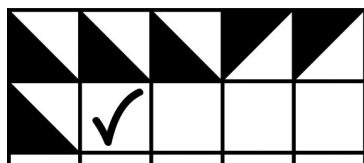



Но после того, как мы покрасили одну клетку, у нас возникают ограничения на покраску соседних. И не очень понятно, как посчитать все возможные раскраски. Приведём два из возможных рассуждений.

Первое решение. Начнём раскраску с верхнего ряда. Как мы поняли, есть четыре способа покрасить клетку в верхнем левом углу. Пусть вы выбрали какую-то раскраску этой клетки, тогда мы знаем, в какой цвет должна быть покрашена левая сторона соседней клетки. Значит, для соседней клетки остаётся лишь два варианта раскраски. Например, если угловая клетка покрашена так , то соседняя с ней может быть либо такой , либо такой . После того как мы покрасим вторую клетку, у нас снова будет два варианта на покраску третьей, и так далее. В итоге получаем, что существует $4 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 64$ способа покрасить первую строку.

Начинаем красить вторую строку. Так как угловая клетка уже покрашена, то мы знаем, в какой цвет должна быть покрашена верхняя сторона клетки, которая находится под ней. Значит, для неё остаётся лишь два варианта раскраски. Например, если угло-

вая клетка покрашена так , то клетка под ней может быть либо такой , либо такой . Посмотрим теперь на вторую клетку в этом ряду:

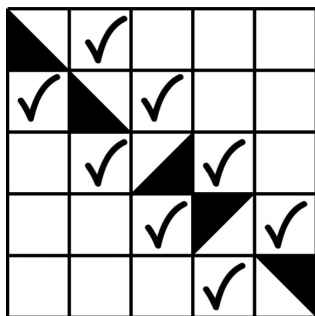


Для неё мы знаем, как раскрашена клетка над ней и как слева от неё. Поэтому мы знаем, в какой цвет покрашены верхняя и левая стороны этой клетки. А значит, мы точно знаем, как она должна быть раскрашена. Например, для приведённой картинки подходит только клетка .

Продолжая так же рассуждать, мы получаем, что и остальные клетки второго ряда однозначно раскрашиваются. Поэтому выбор у нас был только при раскраске первой клетки этого ряда. Значит, если первый ряд покрашен полностью, то есть только два способа покрасить второй ряд.

Рассуждая аналогично, получаем, что есть лишь два способа раскрасить третий ряд. И точно так же для четвёртого и пятого рядов. Итого получаем $64 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 1024$ способа раскрасить весь квадрат.

Второе решение. Но можно рассуждать и по-другому. Давайте сначала как угодно раскрасим клетки на диагонали. Для каждой клетки есть четыре варианта раскраски, поэтому всего есть $4^5 = 1024$ способа раскрасить клетки на диагонали. Посмотрим на клетки, соседние с клетками на диагонали:



У каждой из них уже покрашено две соседние клетки, поэтому для каждой из них мы знаем, в какой цвет покрашены две стороны. А значит, про каждую из них мы точно знаем, как она должна быть раскрашена. Рассуждая аналогично, получится, что мы уже про все оставшиеся клетки понимаем, как они должны быть раскрашены.

Другими словами, раскраска клеток на диагонали однозначно определяет раскраску в остальных клетках. А значит, существует 1024 различных «шахматных» раскрасок.

Ответ. 1024 раскраски.

А теперь попробуйте самостоятельно решить следующие задачи.

Задача 21. Дана квадратная таблица 3×3 , каждую клетку которой можно покрасить в один из трёх цветов. Сколько различных раскрасок таблицы можно получить?

Задача 22. Сколько существует семизначных чисел, все цифры которых нечётны?

Задача 23. Сколькими способами можно разложить пять монет разного достоинства по трём карманам?

Задача 24. В некотором алфавите всего четыре буквы, а словом считается любая последовательность, состоящая не более чем из пяти букв. Сколько слов можно составить из букв этого алфавита?

Задача 25. У Ивана есть пять друзей — Аня, Боря, Вася, Гоша и Даша. Он решил каждый день приглашать в гости одного или нескольких из них в гости так, чтобы группа приглашённых ни разу не повторилась. Сколько дней он сможет это делать?

Выбор иногда уменьшает варианты

При решении комбинаторных задач важно понимать, что иногда выбор одного объекта ограничивает возможные варианты для другого. Мы про это уже немного говорили, когда решали задачу 20, где мы заметили, что несмотря на то, что для каждой конкретной клетки есть четыре варианта раскраски, количество вариантов становится меньше, если мы знаем, как раскрашены соседние клетки. Давайте разовьём эту тему в нескольких следующих задачах.

Задача 26. В классе 25 человек. Сколькими способами можно выбрать старосту класса и его помощника?

В начале кажется, что так как и старостой, и помощником старосты может стать любой из учащихся

класса, то есть $25 \cdot 25$ возможностей выбрать пару. Но давайте рассуждать аккуратнее.

Решение. Старосту класса можно выбрать 25 различными способами. Но после этого для каждого такого выбора старосты существует 24 способа выбрать помощника (староста же не может быть сам себе помощником). Итого получаем $25 \cdot 24 = 600$ способов выбрать старосту класса и его помощника.

Ответ. 600 способов.

Задача 27. Есть стандартная колода из 36 играль-ных карт. Сколько существует способов выбрать четыре карты из колоды так, чтобы они все были разных мастей и разных достоинств?

Решение. Давайте сначала определимся, в каком порядке будут идти масти выбираемых карт. Например, пики, крести, бубны, червы. *Пики* можно выбрать девятью разными способами — это может быть 6, 7, 8, 9, 10, валет, дама, король или туз. После этого *крести* можно выбрать лишь восемью способами (можно взять карту любого достоинства, кроме того, которое было выбрано, когда мы брали *пики*). На *бубны* остаётся лишь семь вариантов, а на *червы* — только шесть. Итого имеем $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 3024$ способа выбрать из колоды четыре карты разных мастей и разного достоинства.

Ответ. 3024 способа.

Попробуйте самостоятельно решить следующие задачи.

Задача 28. Сколько существует способов сделать трёхцветный флаг с горизонтальными полосами одинаковой ширины, если имеется материал шести различных цветов?

Задача 29. В русском алфавите 33 буквы. Сколько различных пятибуквенных «слов» можно составить, если не допускать «слов», где две одинаковые буквы идут подряд?

«Слово» не обязательно должно быть осмысленным. Например, *абвгд* или *ьъыйы* являются допустимыми «словами», а вот *класс*, *ссора* и *пресс* таковыми не являются, так как в них есть две одинаковые подряд идущие буквы.

Задача 30. Сколько существует восьмизначных чисел, все цифры которых имеют одинаковую чётность?

Задача 31. Сколько существует десятизначных чисел с нечётной суммой цифр?

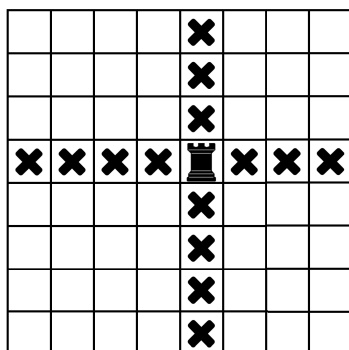
Задача 32. На полке стоят пять книг. Сколько существует способов выбрать несколько из них и сложить в стопку, если в стопке должно быть от двух до четырёх книг и нам важен порядок, в котором лежат книги в стопке?

Отметим ещё раз, что при решении этих задач надо не забывать, что выбор первого объекта может сузить множество вариантов для выбора следующего объекта. Так, например, в задаче 26 выбор старосты ограничивает число людей, претендующих на роль

его помощника до 24 человек, то есть выборы старосты и помощника не являются независимыми, в отличие, например, от задачи 10, где выбор пирожного никак не влиял на последующий выбор печенья.

Рассмотрим ещё несколько задач на ту же идею, объединённых общей тематикой, — это *задачи на шахматных досках*. Заметим, что для решения этих задач про шахматы, по сути, ничего знать не надо, кроме того, как ходят фигуры.

Задача 33. Сколько существует способов поставить на шахматную доску чёрную и белую ладьи так, чтобы они не били друг друга?



Решение. Чёрную ладью можно поставить на любое поле доски, то есть существует 64 способа это сделать. После того как мы поставим чёрную ладью на какое-то поле, для белой ладьи останется лишь $64 - 15 = 49$ допустимых полей, на которые её можно поставить, так как где бы ни стояла чёрная ладья, она бьёт 15 полей (считая то поле, на котором она стоит).

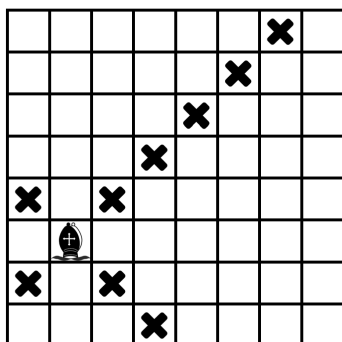
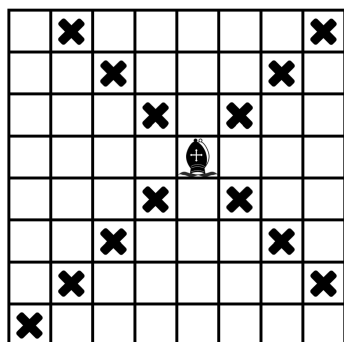
Действительно, кроме того поля, на котором стоит чёрная ладья, она бьёт ещё семь полей, находящихся с ней в той же строке и семь полей, находящихся с ней в том же столбце.

Значит, всего существует $64 \cdot 49 = 3136$ способов поставить на шахматную доску чёрную и белую ладьи так, чтобы они не били друг друга.

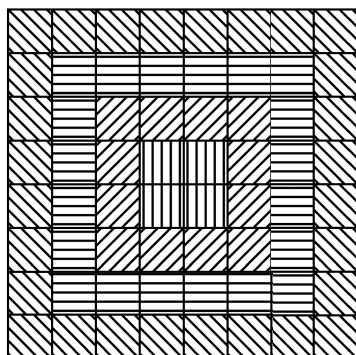
Ответ. 3136 способов.

Задача 34. Сколько существует способов поставить на шахматную доску чёрного и белого слона так, чтобы они не били друг друга?





Решение. На первый взгляд кажется, что эта задача ничем не отличается от предыдущей. Вроде бы опять достаточно понять, сколько полей бьёт слон, когда он стоит на шахматной доске. Но, попробовав поставить его в разные места, мы замечаем, что в отличие от ладьи количество полей, которые бьёт слон, зависит от того, где он стоит:











Поэкспериментировав с положением слона, мы замечаем, что чем ближе к центру доски он располагается, тем больше клеток он бьёт. Давайте заштрихуем все поля шахматной доски четырьмя разными способами, как показано на рисунке:



Тогда

- если чёрный слон стоит на поле , то он бьёт восемь полей (включая то, на котором он стоит);
- если чёрный слон стоит на поле , то он бьёт десять полей;
- если он стоил на поле , то бьёт 12 полей;
- если на поле  — 14 полей.

Таким образом, если чёрный слон стоит на одном из 28 полей , то для белого слона остаётся $64 - 8 = 56$ полей, куда его можно поставить. Если чёрный слон на одном из 20 полей , то у белого слона остаётся $64 - 10 = 54$ поля. Если он стоит на одном из 12 полей , то для белого слона остаётся $64 - 12 = 52$ поля. Если на одном из четырёх полей , то у белого есть $64 - 14 = 50$ возможных полей.

Значит, если мы выберем поставить чёрного слона на одно из полей , то у нас будет $28 \cdot 56 = 1568$ вариантов расстановки двух слонов. Если выберем поставить чёрного слона на поле , то будет $20 \cdot 54 = 1080$ вариантов расстановки. Если решим поставить на поле , то будет $12 \cdot 52 = 624$ варианта. А если на поле , то $4 \cdot 50 = 200$ вариантов.

Таким образом, получается, что всего существует

$$1568 + 1080 + 624 + 200 = 3472$$

способа поставить на шахматную доску чёрного и белого слона так, чтобы они не били друг друга.

Ответ. 3472 способа.

В последней задаче мы увидели, как правила произведения и суммы могут работать в связке. Мы разделяем все возможные способы на группы, в которых мы можем легко посчитать их количество, а потом суммируем эти количества для всех групп.

Чтобы проверить, что вы поняли, как это работает, попробуйте самостоятельно решить следующие задачи.

Задача 35. Сколько существует способов поставить на шахматную доску чёрного и белого ферзя так, чтобы они не били друг друга?

Задача 36. Сколько существует способов поставить на шахматную доску чёрного и белого короля так, чтобы полученная ситуация не противоречила

правилам игры в шахматы? (В шахматах короли не могут стоять в соседних по стороне или по вершине клетках.)

Задача 37. Сколько существует способов поставить на шахматную доску чёрного и белого коня так, чтобы они не били друг друга?

ГЛАВА 2

ДАВАЙТЕ ПОИГРАЕМ В СЛОВА!



В этой главе мы поговорим о биоме Ньютона, которого почему-то все боятся. В художественной литературе «биом Ньютона» часто используют как синоним чего-то очень сложного. Например, Шерлок Холмс, рассказывая о профессоре Мориарти, говорит: «Когда ему исполнился 21 год, он написал трактат о биоме Ньютона, завоевавший ему европейскую известность». А в романе «Мастер и Маргарита» есть ставшая уже классической фраза: «Подумаешь, биом Ньютона!» Но, по сути, биом Ньютона — это знакомая всем с седьмого класса формула сокращённого умножения.

Однако, прежде чем говорить про биом, давайте научимся играть в слова!

Перестановки

Очень многие задачи комбинаторики можно переформулировать в терминах «игры в слова». О чём речь? Возьмём какое-нибудь слово. Например:

ТРУШИН.

Сколько различных слов можно из него составить, просто переставляя буквы? Отступим от лингвистических условностей и будем называть *словом* любую последовательность букв. Думаю, что многие из вас уже понимают, как это посчитать, тогда вот вам слово посложнее:

МАТЕМАТИКА.

Сколько различных слов получится? Те, кто умеет решать и такие задачи, могут смело пропустить пару страниц, на которых мы с вами будем учиться с ними справляться.

Начнём с элементарных вещей. Допустим, буква в слове всего одна, и это буква

А.

Как ни переставляй, ничего нового не получится. Следовательно, если буква одна, то и слово получится одно:

$$A \rightarrow 1.$$

Давайте посложнее. Две буквы:

АБ.

Сколько слов получится из них? Мы понимаем, что есть **АБ**, есть **БА**. И, даже совсем не разбираясь в математике, мы понимаем, что различных слов всего два:

$$AB \rightarrow 2.$$

Пусть теперь у нас три буквы:

АБВ.

Как узнать, сколько всего получится различных слов? Можно их просто «руками» перебрать, и получится **АБВ, АВБ, БАВ, БВА, ВАБ и ВБА**. Итого шесть.

АБВ → 6.

Если такие задачки решать перебором, лучше выработать некоторое правило, в какой последовательности вы выписываете «слова», чтобы быть уверенным, что ничего не пропустили и ничего не выписали дважды. Например, так, как это сделали мы, — в *словарном порядке*. Сначала слова, которые начинаются на первую букву, потом — на следующую и так далее.

Но хочется понять, как связаны между собой ответы — два и шесть — из второй и третьей задач. А понять это не очень сложно. На первом месте может быть одна из трёх букв **А**, **Б** или **В**, но как только мы выбрали, что будет стоять на первом месте, например **А**, у нас осталось только две буквы — **Б** и **В**. А мы знаем, что для двух букв есть только два варианта, как их можно написать. Поэтому в каждом из этих трёх случаев

АБВ, АВБ

БАВ, БВА

ВАБ, ВБА

есть два варианта, а значит, всего слов три раза по два, то есть шесть. Вот откуда берётся шесть! И это

можно понять, не выписывая все варианты, а попытавшись проанализировать. Это нам понадобится, когда мы начнём думать про четыре буквы:

АБВГ.

Давайте рассуждать, сколько же слов можно получить. На первом месте может быть любая из букв **А**, **Б**, **В** или **Г**. Зафиксируем её. Теперь осталось в любом порядке написать оставшиеся три буквы. Но мы знаем, что есть шесть способов написать три оставшиеся буквы. А значит, для каждой первой буквы существует шесть различных слов. Но у нас есть четыре способа выбрать первую букву. Для буквы **А** есть шесть вариантов, для буквы **Б** есть шесть вариантов, и столько же для букв **В** и **Г**. Итого четыре раза по шесть. Даже ничего не выписывая, мы понимаем, что тут будет:

$$\text{АБВГ} \rightarrow 4 \cdot 6 = 24.$$

Если же у нас пять букв:

АБВГД,

снова фиксируем первую букву, это можно сделать пятью разными способами. И дальше получаем предыдущую задачу: нужно переставить четыре оставшиеся буквы. А четыре буквы переставляются 24 способами. Значит, из пяти букв получится:

$$\text{АБВГД} \rightarrow 5 \cdot 24 = 120.$$

Думаю, что вы уже начинаете чувствовать закономерность: чтобы посчитать количество слов, которое можно получить из шести букв, нужно взять шесть

раз по 120. То есть 720. Это мы ответили на вопрос, сколько слов получится из слова **ТРУШИН**:

$$\text{ТРУШИН} \rightarrow 6 \cdot 120 = 720.$$

Теперь давайте поймём, как выглядит ответ в общем виде. Для одной буквы — 1, для двух — 2, для трёх букв — $3 \cdot 2$, для четырёх — $4 \cdot 3 \cdot 2$, для пяти — $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2$. Так появляется *факториал*. Он будет возникать довольно часто, это просто короткая запись произведения всех натуральных чисел от 1 до какого-то n :

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n.$$

И мы только что доказали, что, переставляя n различных букв, можно получить $n!$ различных слов.

Количество всевозможных перестановок n различных элементов равно $n!$.

Так как при решении комбинаторных задач факториалы появляются очень часто, то принято считать, что можно оставлять их в ответе, не доводя до окончательного числа. И понятно почему. Про какое из чисел 25! или 15 511 210 043 330 985 984 000 000 вы можете больше рассказать? Например, про какое из них вам проще ответить на вопрос, делится ли оно на 17?

Прежде чем двигаться дальше, давайте сформулируем основное свойство факториала. Оно сразу вытекает из его определения

$$(n + 1)! = (n + 1) \cdot n!$$

Это равенство справедливо для любого натурального n . Однако в ряде случаев для единообразия записи ответа бывает полезно считать, что оно выполнено и для $n = 0$, то есть $1! = 1 \cdot 0!$. Откуда получаем, что $0! = 1$. На это следует смотреть лишь как на соглашение, хотя и довольно естественное. Ведь если у вас ноль элементов, то как их ни переставляй, ничего нового не получится. Поэтому естественно считать, что *количество всевозможных перестановок нуля элементов равно 1*.

К таким перестановкам сводится довольно много задач, которые на первый взгляд совсем не про это.

Задача 38. На танцевальной вечеринке собрались пять парней и пять девушек. Сколько существует способов разбить их на пары для участия в очередном танце?

Решение. Пронумеруем для удобства всех парней. Тогда с *первым* парнем пару может организовать любая из пяти девушек, со *вторым* — любая из четырёх оставшихся и так далее. С *пятым* может танцевать только последняя оставшаяся девушка. В итоге получаем, что существует

$$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

способов разбить их на пары.

То есть фактически каждый способ — это просто перестановка пяти «элементов».

Ответ. 120 способов.

Задача 39. Сколько существует способов расставить восемь одинаковых ладей на шахматной доске так, чтобы они не били друг друга?

Решение. В первый вертикальный ряд можно поставить ладью на любую из восьми клеток. Во второй вертикальный ряд можно поставить на любую клетку, кроме той, которая находится в одном горизонтальном ряду с первой ладьёй. То есть, после того как мы поставили ладью в первый вертикальный ряд, у нас осталось лишь семь возможностей поставить ладью во второй вертикальный ряд. Для ладьи в третьем ряду останется лишь шесть возможностей. И так далее. Итого получается, что существует

$$8! = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 40\,320$$

способов расставить восемь одинаковых ладей на шахматной доске так, чтобы они не били друг друга.

Ответ. $8! = 40\,320$ способов.

Со следующими задачами попробуйте справиться самостоятельно.

Задача 40. Компания из пяти человек хочет поехать на машине, в которой всего пять мест, считая место водителя. Сколько существует способов им разместиться, если водительские права есть лишь у троих из них?

Задача 41. Пять девушек водят хоровод. Сколькими различными способами они могут встать в круг?

Задача 42. Сколько существует различных способов рассадить пять мальчиков и пять девочек за круглый стол с десятью креслами так, чтобы мальчики и девочки чередовались?

Задача 43. Сколькими способами семь учеников могут выстроиться в очередь в столовую, если Аня хочет стоять рядом со своей подругой Катей?

Перестановки с повторениями

Но наши рассуждения про перестановки работают, только когда все буквы разные. Чем же осложняется задача, когда есть одинаковые буквы? Давайте вернёмся к слову

МАТЕМАТИКА.

Если в слове поменять местами, например, две буквы **М**, то ничего не изменится. Поэтому ответ точно будет другой. Как же посчитать, сколько получится различных слов, если есть одинаковые буквы? Самый простой способ справиться с этой задачей — на время забыть, что буквы **М** одинаковые. Будем считать, что это M_1 и M_2 . Заодно сделаем вид, что буквы **А** разные, и обозначим их как A_1 , A_2 и A_3 , и также поступим с буквами **Т**:

$$M_1 A_1 T_1 E M_2 A_2 T_2 И K A_3.$$

То есть теперь у нас «слово», в котором десять разных букв. И мы знаем, что существует $10!$ способов переставить буквы между собой, иными словами, существует $10!$ различных слов, которые можно получить из этого набора букв.

Рассмотрим любое из этих $10!$ слов. В нём как-то стоят буквы M_1 и M_2 . Но, кроме него, существует другое слово, в котором всё остальное то же самое, только буквы M_1 и M_2 поменяли местами:

$$\begin{aligned} & \dots M_1 \dots M_2 \dots, \\ & \dots M_2 \dots M_1 \dots. \end{aligned}$$

Сейчас мы считаем, что это разные слова, потому что для нас M_1 и M_2 не одно и то же. Но давайте теперь вспомним, что на самом деле M_1 и M_2 — это одна и та же буква M . Тогда слова $\dots M_1 \dots M_2 \dots$ и $\dots M_2 \dots M_1 \dots$ — одинаковые. Значит, если мы вспомним, что M_1 и M_2 — это одна и та же буква M , мы поймём, что каждое слово мы посчитали дважды. А значит, теперь слов стало в два раза меньше: $\frac{10!}{2}$.

Прделаем то же самое с буквой T . Вспомним, что на самом деле T_1 и T_2 — это одна и та же буква, а значит, слова, которые отличаются лишь перестановкой T_1 и T_2 , — это одно и то же слово. Поэтому количество слов $\frac{10!}{2}$ нужно ещё раз разделить на 2, и получится $\frac{10!}{2 \cdot 2}$ слов.

С буквой A всё немного сложнее. Она трижды встречается в слове МАТЕМАТИКА. И есть много слов, которые отличаются лишь порядком букв A_1 , A_2 и A_3 :

$$\begin{aligned} & \dots A_1 \dots A_2 \dots A_3 \dots, \\ & \dots A_1 \dots A_3 \dots A_2 \dots, \\ & \dots A_2 \dots A_1 \dots A_3 \dots, \\ & \dots A_2 \dots A_3 \dots A_1 \dots, \\ & \dots \end{aligned}$$

Давайте попробуем понять, сколько таких слов, не выписывая их все. Мы же помним, что есть шесть способов переставить между собой буквы A_1 , A_2 и A_3 , потому что $A_1A_2A_3$ — это «слово» из трёх различных букв. Таким образом, пока мы не вспомнили, что A_1 , A_2 и A_3 — одна и та же буква, мы каждое слово считали шесть раз. Поэтому, чтобы получить окончательный ответ, нужно $\frac{10!}{2 \cdot 2}$ поделить на шесть: $\frac{10!}{2 \cdot 2 \cdot 6}$.

Не очень сложно довести ответ до конкретного числа:

$$\begin{aligned} \frac{10!}{2 \cdot 2 \cdot 6} &= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{2 \cdot 2 \cdot 6} = \\ &= \frac{2 \cdot 3 \cdot \cancel{4} \cdot 5 \cdot \cancel{6} \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{\cancel{4} \cdot \cancel{6}} = \\ &= 30 \cdot 56 \cdot 90 = 1680 \cdot 90 = 151\,200. \end{aligned}$$

МАТЕМАТИКА \rightarrow 151 200.

Но если в задаче не требуют привести ответ к числу в десятичной форме записи, то вполне можно оставить его в виде $\frac{10!}{24}$.

Чтобы научиться для любого набора букв понимать, сколько различных слов можно получить их перестановкой, нужно чётко понять, что 2 и 6 в задаче про слово МАТЕМАТИКА — это не просто 2 и 6, а количество способов поменять местами две буквы **М** и три буквы **А** соответственно. Потому грамотнее писать не $\frac{10!}{2 \cdot 2 \cdot 6}$, а $\frac{10!}{2! \cdot 2! \cdot 3!}$. Первый 2! отвечает

за то, что в слове есть две буквы **М**, второй 2! — что есть две буквы **Т**, 3! — что есть три буквы **А**. То есть мы делим на факториал количества одинаковых букв.

Теперь давайте поймём, какой же будет ответ для любого слова. Пусть у нас в слове n букв. Пусть различных букв всего k . Пронумеруем все различные буквы (например, в алфавитном порядке) — первая буква, вторая, третья, ..., k -я. И пусть первых букв n_1 штук, вторых — n_2 , третьих n_3 , ..., k -х букв — n_k .

Чтобы было понятнее, о чём речь, давайте посмотрим на то же слово МАТЕМАТИКА. Какие тут есть различные буквы? **А, Е, И, К, М** и **Т**. В данном случае в слове $n = 10$ букв. А количество k различных букв равно шести. Далее мы говорим, что

букв **А** — 3 штуки,
 букв **Е** — 1 штука,
 букв **И** — 1 штука,
 букв **К** — 1 штука,
 букв **М** — 2 штуки,
 букв **Т** — 2 штуки.

То есть $n_1 = 3$, $n_2 = 1$, $n_3 = 1$, $n_4 = 1$, $n_5 = 2$ и $n_6 = 2$.

А в общем случае эти n_1, n_2, \dots, n_k — какие-то произвольные натуральные числа, но такие, что их сумма равна n . Теперь, как и со словом МАТЕМАТИКА, мы временно представим, что все буквы разные, снабдив одинаковые буквы индексами 1, 2, 3, Тогда количество различных слов, которые мы можем получить, — $n!$. Потом мы вспоминаем, что первые буквы на самом деле одинаковые, поэтому нужно поделить на $n_1!$, и вторые буквы одинаковые — нужно поделить

на $n_2!$. И так далее. В итоге получаем общую формулу для задачи «какое количество различных слов можно составить, переставляя буквы в слове длины n , в котором k различных букв и первая буква встречается n_1 раз, вторая — n_2 раза, третья — n_3 раза и так далее»:

$$\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!}.$$

Если мы воспользуемся этой формулой для слова МАТЕМАТИКА, то у нас получится такой результат:

$$\frac{10!}{3! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 2! \cdot 2!}.$$

Но писать $1!$ совсем не обязательно, потому что $1! = 1$, и эта единица ни на что не влияет.

Нет большого смысла запоминать эту формулу для общей задачи. Важнее понимать, откуда она берётся.

Если хотите научиться решать содержательные задачи по комбинаторике, то обязательно нужно освоить «игру в слова». Сейчас может показаться, что это какая-то мелкая неинтересная проходная идея, но скоро вы увидите, что очень многие задачи сводятся к этой игре.

Для закрепления метода решим несколько задач.

Задача 44. Сколько различных слов можно получить перестановкой букв в слове АЛГЕБРА?

Решение. Давайте на время забудем про то, что буквы А одинаковые, и для их отличия друг от друга назовём одну A_1 , а другую A_2 . Тогда получится $7!$ различных слов. Однако слова, которые получа-

ются друг из друга лишь перестановкой букв A_1 и A_2 , например,

$$A_1 \text{ЛГЕБРА}_2 \text{ и } A_2 \text{ЛГЕБРА}_1,$$

на самом деле идентичны. Поэтому $7!$ слов надо разделить на два. В итоге существует $\frac{7!}{2} = \frac{5040}{2} = 2520$

различных слов, которые можно получить перестановкой букв в слове АЛГЕБРА.

Ответ. 2520 слов.

Задача 45. Сколько различных слов можно получить перестановкой букв в слове ПАРАБОЛА?

Решение. Давайте опять будем считать, что все буквы A различны — A_1 , A_2 и A_3 . Тогда получим $8!$ различных слов.

Давайте поймём, сколько раз мы посчитали каждое слово. Например, слово ПАРАБОЛА можно записать одним из следующих способов:

$$\begin{aligned} &PA_1RA_2BOA_3, PA_1RA_3BOA_2, \\ &PA_2RA_1BOA_3, PA_2RA_3BOA_1, \\ &PA_3RA_1BOA_2, PA_3RA_2BOA_1 — \end{aligned}$$

всего шесть способов (так как $6 = 3!$ — это количество способов переставить буквы A_1 , A_2 и A_3). Значит, забыв, что буквы A одинаковые, мы каждое слово посчитали по шесть раз, то есть всего существует

$$\frac{8!}{3!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 6720$$

различных слов, которые можно получить перестановкой букв в слове ПАРАБОЛА.

Ответ. 6720 слов.

Как видите, мы решили эти две задачи, не ссылаясь на доказанную формулу, а заново проведя все рассуждения. Старайтесь делать так же, пока не начнёте хорошо чувствовать, почему она работает.

А теперь рассмотрим пару задач, которые вроде бы совсем не про нашу игру в слова.

Задача 46. Мама купила для сына один апельсин, две груши, три мандарина и четыре яблока. В течение ближайших десяти дней мама будет давать на завтрак сыну один из имеющихся фруктов. Сколько существует различных способов ей это сделать?

Решение. Каждый из способов составить расписание завтраков можно представить следующим образом:

МЯГЯМЯАГМЯ,

где каждый фрукт представлен своей первой буквой. Но каждый такой способ — это некоторая перестановка *букв в слове*

АГГМММЯЯЯЯ,

которых, как мы теперь знаем, всего

$$\begin{aligned}\frac{10!}{2! \cdot 3! \cdot 4!} &= \frac{\cancel{1} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{4} \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{(1 \cdot 2) \cdot (1 \cdot 2 \cdot 3) \cdot (\cancel{1} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{4})} = \\ &= \frac{5 \cdot \cancel{6} \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{2 \cdot \cancel{6}} = 12\,600.\end{aligned}$$

Поэтому существует 12 600 способов давать фрукты на завтрак в течение ближайших десяти дней.

Ответ. 12 600 способов.

Задача 47. Труппа театра состоит из десяти актёров. Сколько существует способов выбрать из неё два разных коллектива по четыре человека для участия в двух разных утренниках?

Решение. Выстроим всех актёров в ряд и наденем на них маечки: с номером 1 на тех, кто пойдёт на первый утренник, с номером 2 — на тех, кто пойдёт на второй, и с номером 0 — на тех, кто не пойдёт ни на один из них. И мы увидим какое-то такое *слово*:

0112102212.

То есть каждому способу выбрать две труппы соответствует *слово* из десяти *букв*, из которых две буквы 0, четыре буквы 1 и четыре буквы 2. Мы знаем, что таких слов всего

$$\begin{aligned} \frac{10!}{2! \cdot 4! \cdot 4!} &= \frac{\cancel{1} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{4} \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{(1 \cdot 2) \cdot (\cancel{1} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{4}) \cdot (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4)} = \\ &= \frac{5 \cdot \cancel{6} \cdot 7 \cdot \cancel{8} \cdot 9 \cdot 10}{\cancel{6} \cdot \cancel{8}} = 3150. \end{aligned}$$

Поэтому существует 3150 способов выбрать из труппы два разных коллектива по четыре человека для участия в двух разных утренниках.

Ответ. 3150 способов.

Со следующими задачами, думаю, вы справитесь самостоятельно.

Задача 48. Сколько различных слов можно получить перестановкой букв в слове КОМБИНАТОРИКА?

Задача 49. Сколько существует способов расставить на первой горизонтали шахматной доски короля, ферзя, двух слонов, двух коней и две ладьи?

Задача 50. Сколько существует способов расставить 12 белых и 12 чёрных шашек на чёрных полях шахматной доски?

Бином Ньютона

Вот мы и добрались до бинома! Что же такое формула бинома Ньютона? Мы хорошо знаем, что

$$\begin{aligned}(a + b)^1 &= a + b, \\ (a + b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2, \\ (a + b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.\end{aligned}$$

И хочется понять, как выглядит эта формула для произвольного показателя степени. Очевидно, что для конкретного показателя это несложно вывести. Например, если вы помните, что

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,$$

то для вывода формулы для четвёртой степени достаточно сделать следующее:

$$\begin{aligned}(a + b)^4 &= (a + b) \cdot (a + b)^3 = \\ &= (a + b) \cdot (a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3) = \\ &= a \cdot (a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3) + \\ &\quad + b \cdot (a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3) = \\ &= a^4 + 3a^3b + 3a^2b^2 + ab^3 + a^3b + 3a^2b^2 + 3ab^3 + b^4 = \\ &= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4.\end{aligned}$$

Но как узнать, как для любого натурального показателя n будет выглядеть многочлен $(a+b)^n$ после раскрытия скобок и приведения всех его подобных членов, не выводя каждый раз заново новую формулу? Давайте начнём издалека. Для начала вспомним, как вообще раскрываются скобки.

Как только скобок становится больше двух, у многих начинаются затруднения с раскрытием таких выражений. Возьмём, например,

$$(a + b) \cdot (c + d) \cdot (e + f).$$

Понятно, что нужно умножить первую скобку на вторую, получится четыре слагаемых

$$(a + b) \cdot (c + d) = ac + ad + bc + bd,$$

потом скобку из четырёх слагаемых умножить на третью скобку, и получится восемь слагаемых:

$$\begin{aligned} & (ac + ad + bc + bd) \cdot (e + f) = \\ & = ace + ade + bce + bde + acf + adf + bcf + bdf. \end{aligned}$$

Но когда скобок становится больше, решать так последовательно становится очень долго. Потому правильнее понять по сути, что происходит, когда раскрываются скобки. А происходит следующее: берётся какое-нибудь слагаемое из первого множителя $(a + b)$, умножается на какое-нибудь слагаемое из второго множителя $(c + d)$ и какое-нибудь слагаемое из третьего множителя $(e + f)$. Все возможные произведения, которые так получатся, мы выписываем и складываем. Если начать со слагаемого a в первой скобке, то получится произведение ace , потом acf , после этого ade , затем adf . Если же

начать с b , то получим bce , bcf , bde и bdf . Вот и все слагаемые, которые получаются: берём любое из первой скобки, любое из второй, любое из третьей, перемножаем и все эти произведения складываем между собой.

А теперь давайте попробуем проделать то же самое, например, для куба суммы, чтобы понять, откуда в формуле

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

появляются тройки. Что такое $(a + b)^3$?

$$(a + b)^3 = (a + b) \cdot (a + b) \cdot (a + b).$$

Раскрываем сразу все скобки. Если из первой скобки взять a , то получатся слагаемые

$$aaa + aab + aba + abb.$$

Если же взять b , то будут слагаемые

$$baa + bab + bba + bbb.$$

Дальше мы говорим, что aaa — это a^3 , bbb — это b^3 . aab , aba и baa — это a^2b , и они встретились три раза. abb , bab и bba — это ab^2 , и они тоже встретились три раза. В итоге и получается равенство

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

А можно ли было, ничего не расписывая, понять, что коэффициенты при a^2b и ab^2 будут именно тройки? Откуда на самом деле берутся эти коэффициенты? Три — это количество различных комбинаций для a^2b : aab , aba и baa . По сути, это слово из трёх букв, в котором буква a встречается два раза, а буква

b — один раз. Но мы заранее знаем, сколько будет различных комбинаций!

$$\frac{3!}{2! \cdot 1!} = \frac{6}{2} = 3.$$

Теперь давайте попробуем сделать то же самое в общем случае. Раскроем скобки у $(a + b)^n$. Представим, что мы выписали n скобок:

$$(a + b) \cdot (a + b) \cdot \dots \cdot (a + b).$$

Теперь мы просто берём из каждой скобки какую-нибудь из букв и перемножаем их. Сделав так для всех возможных выборов букв, мы получим большое количество слагаемых. У всех слагаемых сумма показателей степеней у a и b будет равна n , потому что из каких-то скобок мы взяли a , а из всех остальных — b , но суммарно мы взяли n букв. Поэтому все слагаемые, которые получатся, будут иметь вид a в какой-то степени, умноженное на b в какой-то степени, причем сумма этих «каких-то» равна n .

Возьмём какое-нибудь получившееся слагаемое, например $a^k b^{n-k}$, и попытаемся понять, сколько раз оно встретится. Для этого нам нужно посчитать, сколько существует слов длины n , в которых k букв a , и $(n - k)$ букв b . Мы знаем, что количество таких слов будет

$$\frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}.$$

Это значит, что после приведения подобных слагаемых перед $a^k b^{n-k}$ окажется коэффициент

$$\frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}.$$

$$\frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \cdot a^k b^{n-k}.$$

И так для каждого k .

Это можно сделать, только если $k \neq 0$ и $k \neq n$. Но в этих двух случаях коэффициент, очевидно, будет равен 1, так как есть только одно слово, в котором все буквы — a , и ровно одно, в котором все буквы — b . Но если мы формально найдём значение выражения $\frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$ при $k = 0$ или при $k = n$, то получим

$\frac{n!}{0! \cdot n!} = 1$. Поэтому даже при этих k коэффициент при $a^k b^{n-k}$ всё равно равен $\frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$.

Если просуммировать $\frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \cdot a^k b^{n-k}$ по всем возможным k , то и получится формула бинома Ньютона:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \cdot a^k b^{n-k}$$

Значок $\sum_{k=0}^n$ означает, что мы суммируем слагаемые вида

$$\frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \cdot a^k b^{n-k}$$

при всех k от 0 до n .

Посмотрим, например, как будут выглядеть коэффициенты в формуле бинома Ньютона при $n = 5$:

$$\bullet \quad k = 0 : \quad \frac{5!}{0! \cdot 5!} = \frac{120}{120} = 1;$$

- $k = 1 : \quad \frac{5!}{1! \cdot 4!} = \frac{120}{24} = 5;$
- $k = 2 : \quad \frac{5!}{2! \cdot 3!} = \frac{120}{12} = 10;$
- $k = 3 : \quad \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{120}{12} = 10;$
- $k = 4 : \quad \frac{5!}{4! \cdot 1!} = \frac{120}{24} = 5;$
- $k = 5 : \quad \frac{5!}{5! \cdot 0!} = \frac{120}{120} = 1.$

То есть

$$(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5.$$

Числа $\frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$ называются биномиальными коэффициентами и обозначаются C_n^k (в англоязычной литературе чаще встречается обозначение $\binom{n}{k}$ — два индекса записаны друг над другом в скобках, и с другим порядком индексов). У биномиальных коэффициентов есть много интересных свойств, но об этом мы поговорим чуть позже.

Используя обозначение C_n^k , формулу бинома Ньютона можно записать ещё компактнее:

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k}$$

Так что формула бинома Ньютона, которой пугают школьников и студентов, не так уж страшна.

При выводе формулы бинома Ньютона мы убедились, как важно уметь «играть в слова» — пони-

мать, сколько различных слов можно составить, переставляя буквы в заданном слове. Этот приём можно использовать в большом количестве задач по комбинаторике.

Сумма степеней

Давайте немного отдохнём от комбинаторики и поговорим об одном не самом очевидном применении формулы бинома Ньютона. Этот раздел никак не связан со следующим материалом, поэтому при первом прочтении его можно пропустить без ущерба для понимания дальнейшего текста.



Думаю, что многие из вас знают, чему равна сумма первых n натуральных чисел

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}.$$

Кто-то знает, чему равна сумма квадратов первых n натуральных чисел:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}.$$

Возможно, кто-то даже знает формулу для суммы кубов первых n натуральных чисел. Есть даже те, кто умеет эти формулы доказывать. Например, по индукции. Но сейчас мы научимся их все выводить. И поможет нам формула бинома Ньютона.

Давайте выпишем сумму квадратов первых n натуральных чисел, а прямо над ними запишем квадраты чисел, которые на единицу больше:

$$\begin{array}{ccccccc} (1+1)^2 & + & (2+1)^2 & + & (3+1)^2 & + & \dots & + & (n+1)^2 \\ 1^2 & + & 2^2 & + & 3^2 & + & \dots & + & n^2. \end{array}$$

И давайте вычтем из первой строчки вторую. Для этого поймём в общем виде, чему равна разность чисел, стоящих друг над другом:

$$(k+1)^2 - k^2 = (k^2 + 2k + 1) - k^2 = 2k + 1.$$

Значит, после вычитания из верхней строчки нижней получится

$$\begin{aligned} (2 \cdot 1 + 1) &+ (2 \cdot 2 + 1) + (2 \cdot 3 + 1) + \dots + (2n + 1) = \\ &= 2 \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + n) + \underbrace{1 + 1 + 1 + \dots + 1}_{n \text{ раз}} = \\ &= 2 \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + n) + n. \end{aligned}$$

Но, с другой стороны, эти две суммы квадратов почти не отличаются друг от друга. В верхней строчке сумма квадратов чисел от 2 до $(n+1)$, а во второй — от 1 до n . Поэтому разность, которую мы посчитали, равна

$$\begin{aligned} &(2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + (n+1)^2) - \\ &\quad - (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) = \\ &= ((2^2 + 3^2 + \dots + n^2) + (n+1)^2) - \\ &\quad - (1^2 + (2^2 + 3^2 + \dots + n^2)) = \\ &= (n+1)^2 - 1^2 = (n^2 + 2n + 1) - 1 = n^2 + 2n. \end{aligned}$$

В итоге мы получили, что

$$2 \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + n) + n = n^2 + 2n.$$

То есть

$$2 \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + n) = n^2 + n.$$

Значит,

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n^2 + n}{2}.$$

Вот так, не самым быстрым путём, мы получили формулу

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n \cdot (n + 1)}{2}$$

Это, конечно, не самый разумный способ доказывать это равенство, но мы его привели, чтобы вам была понятна логика следующих рассуждений.

Давайте теперь выпишем сумму кубов первых n натуральных чисел, а прямо над ними запишем кубы чисел, которые на единицу больше:

$$\begin{array}{ccccccc} (1 + 1)^3 & + & (2 + 1)^3 & + & (3 + 1)^3 & + & \dots + (n + 1)^3 \\ 1^3 & + & 2^3 & + & 3^3 & + & \dots + n^3 \end{array}$$

И давайте вычтем из первой строчки вторую. Для этого поймём, чему равна разность чисел, стоящих друг над другом:

$$\begin{aligned} (k + 1)^3 - k^3 &= (k^3 + 3k^2 + 3k + 1) - k^3 = \\ &= 3k^2 + 3k + 1. \end{aligned}$$

Значит, после вычитания из верхней строчки нижней получится

$$\begin{aligned} &(3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 1) + (3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 1) + \\ &+ (3 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3 + 1) + \dots + (3n^2 + 3n + 1) = \\ &= 3 \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) + \\ &+ 3 \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + n) + \underbrace{1 + 1 + 1 + \dots + 1}_{n \text{ раз}} = \end{aligned}$$

$$= 3 \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) + 3 \cdot \frac{n \cdot (n+1)}{2} + n.$$

Но, с другой стороны, разность, которую мы посчитали, равна

$$\begin{aligned} & (2^3 + 3^3 + 4^3 + \dots + (n+1)^3) - \\ & \quad - (1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3) = \\ & = ((2^3 + 3^3 + \dots + n^3) + (n+1)^3) - \\ & \quad - (1^3 + (2^3 + 3^3 + \dots + n^3)) = \\ & = (n+1)^3 - 1^3 = (n^3 + 3n^2 + 3n + 1) - 1 = \\ & \quad = n^3 + 3n^2 + 3n. \end{aligned}$$

В итоге мы получили, что

$$\begin{aligned} & 3 \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) + 3 \cdot \frac{n \cdot (n+1)}{2} + n = \\ & \quad = n^3 + 3n^2 + 3n. \end{aligned}$$

То есть

$$\begin{aligned} & 3 \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) = \\ & = n^3 + 3n^2 + 2n - 3 \cdot \frac{n \cdot (n+1)}{2}. \end{aligned}$$

Но

$$n^3 + 3n^2 + 2n = n \cdot (n^2 + 3n + 2) = n \cdot (n+1) \cdot (n+2).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} & 3 \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) = \\ & = n \cdot (n+1) \cdot (n+2) - 3 \cdot \frac{n \cdot (n+1)}{2} = \\ & = \frac{2 \cdot n \cdot (n+1) \cdot (n+2) - 3 \cdot n \cdot (n+1)}{2} = \end{aligned}$$

$$= \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2(n+2)-3)}{2} =$$

$$= \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{2}.$$

Значит,

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}$$

Думаю, вы уже поняли идею. Продолжим?
Выпишем:

$$\begin{array}{ccccccc} (1+1)^4 & + & (2+1)^4 & + & (3+1)^4 & + & \dots + (n+1)^4. \\ 1^4 & + & 2^4 & + & 3^4 & + & \dots + n^4. \end{array}$$

Заметим, что:

$$\begin{aligned} (k+1)^4 - k^4 &= (k^4 + 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1) - k^4 = \\ &= 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1. \end{aligned}$$

Значит, после вычитания из верхней строчки нижней получится

$$\begin{aligned} & (4 \cdot 1^3 + 6 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 + 1) + \\ & + (4 \cdot 2^3 + 6 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 + 1) + \dots + \\ & + (4n^3 + 6n^2 + 4n + 1) = \\ & = 4 \cdot (1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3) + \\ & + 6 \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) + \\ & + 4 \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + n) + \underbrace{1 + 1 + 1 + \dots + 1}_{n \text{ раз}} = \\ & = 4 \cdot (1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3) + \\ & + 6 \cdot \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6} + 4 \cdot \frac{n \cdot (n+1)}{2} + n. \end{aligned}$$

Но, с другой стороны, разность, которую мы посчитали, равна

$$\begin{aligned} & (2^4 + 3^4 + 4^4 + \dots + (n+1)^4) - \\ & \quad - (1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + n^4) = \\ & = (n+1)^4 - 1^4 = (n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1) - 1 = \\ & \quad = n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n. \end{aligned}$$

В итоге мы получили, что

$$\begin{aligned} & 4 \cdot (1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3) + \\ & + n \cdot (n+1) \cdot (2n+1) + 2 \cdot n \cdot (n+1) + n = \\ & \quad = n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n. \end{aligned}$$

То есть

$$\begin{aligned} & 4 \cdot (1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3) = \\ & = n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 3n - n \cdot (n+1) \cdot (2n+1) - \\ & \quad - 2 \cdot n \cdot (n+1) = n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 3n - \\ & \quad - (2n^3 + 3n^2 + n) - (2n^2 + 2n) = \\ & \quad = n^4 + 2n^3 + n^2 = n^2 \cdot (n+1)^2. \end{aligned}$$

Значит,

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2 \cdot (n+1)^2}{4}$$

А учитывая то, что $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$, мы получили неожиданное равенство

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + \dots + n)^2$$

И так можно продолжать дальше. При этом всё, что мы для этого используем, — это знание того, чему

равно $(k + 1)^2, (k + 1)^3, (k + 1)^4, (k + 1)^5, \dots$, то есть только формулу бинома Ньютона.

Думаю, что для тренировки вам будет полезно самостоятельно решить следующую задачу.

Задача 51. Выведите формулу для суммы $1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + n^4$.

ГЛАВА 3

ОТ БИНОМА ДО ТРЕУГОЛЬНИКА, И ОБРАТНО



В прошлой главе мы познакомились с биномиальными коэффициентами.

Давайте попробуем лучше понять, как они устроены и как связаны друг с другом. Но сначала продолжим играть в слова!

Числа сочетаний

Что такое числа сочетаний? Они довольно часто возникают при необходимости что-то посчитать. Допустим, у нас класс из двадцати детей и нужно из них выбрать каких-нибудь семерых. Сколько способов это сделать? Считать это можно по-разному. Я больше всего люблю считать так: выставим всех школьников в ряд — первый, второй, третий, ..., двадцатый. А теперь давайте на тех, кого мы выбрали, наденем красную шапочку, а на тех, кого не взяли, — синюю:

С К С С К К С С С С К С С С К С С К К С

И если мы это сделаем, то получится слово! Слово из двадцати букв, семь из которых — это буква **К**, а тринадцать оставшихся букв — **С**. Поэтому количе-

ство способов выбрать семь человек из двадцати по выведенной нами формуле для игры в слова равно

$$\frac{20!}{7! \cdot 13!}.$$

Эта величина называется числом сочетаний из двадцати по семь.

В общем случае для числа сочетаний из n по k (то есть для количества способов из n различных объектов выбрать k) получается формула

$$\frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}.$$

Как легко заметить, это выражение совпадает с тем, которое появилось у нас в качестве биномиальных коэффициентов. Поэтому число сочетаний из n по k тоже обозначают C_n^k . Чуть позже мы подробнее поговорим о том, как так получилось, что биномиальные коэффициенты и числа сочетаний — это одно и то же.

Обычно формулу для чисел сочетаний выводят без нашей игры в слова. Давайте приведём и это доказательство. Стандартные рассуждения такие. Нам нужно выбрать семь человек из двадцати. Давайте попробуем эту группу собрать. У нас есть 20 способов выбрать *первого*. Теперь выбираем второго. У нас осталось 19 человек, поэтому есть 19 способов выбрать *второго*. Для *третьего* есть 18 способов и так далее. *Седьмого* будем выбирать из 14 человек.

Вроде бы получается, что существует

$$20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14$$

способов выбрать семь человек из двадцати. Так? Так, но не совсем, потому что мы не просто выбрали группу из семи человек, мы сказали: ты — *первый*, ты — *второй*, ты — *третий* и так далее. То есть при выборе мы как будто маечки на них надели с номерами. Но нам-то всё равно, какой у кого номер! Нам нужно просто выбрать группу, состоящую из семи человек.

Сколько же раз мы посчитали каждую группу? Если у нас есть группа из семи человек, то переодеть на них майки есть $7!$ способов. Потому что если у нас есть маечки с номерами 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 и группа из семи человек уже выбрана, то первому человеку можно надеть любую из семи маечек, второму — любую из шести и так далее. То есть существует

$$7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 7!$$

возможностей перенумеровать 7 человек. Это значит, что каждую группу из семи человек мы посчитали $7!$ раз. Поэтому полученный ответ нужно поделить на $7!$:

$$\frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14}{7!}.$$

На первый взгляд кажется, что это выражение отличается от того, которое получилось при «игре в слова», — $\frac{20!}{7! \cdot 13!}$. Но на самом деле это одно и то же.

Потому что если $20!$ (произведение всех натуральных чисел от 1 до 20) разделить на $13!$ (произведение всех натуральных чисел от 1 до 13), то как раз и останется произведение всех натуральных от 14 до 20.

Поэтому можно было обойтись и без «игры в слова», но мне кажется, что важно прочувствовать эту идею и её применение к решению разнообразных задач.

Прежде чем продолжить, давайте чуть больше поймём про числа сочетаний. Мы с вами вывели две формулы для них:

$$C_n^k = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}; \quad C_n^k = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!}.$$

И хотя первая выглядит более компактной, пользоваться чаще мы будем второй. Потому что с помощью неё мы сразу получаем, что

$$C_n^2 = \frac{n \cdot (n-1)}{2!} = \frac{n \cdot (n-1)}{2};$$

$$C_n^3 = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{3!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{6};$$

$$C_n^4 = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3)}{4!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3)}{24};$$

...

Более того, в каких-то случаях можно обходиться вообще без формул. Сколько существует способов выбрать одного человека из n ? Очевидно, что таких способов ровно n . Поэтому $C_n^1 = n$. А сколько существует способов выбрать n человек из n ? Понятно, что такой способ всего один. Поэтому $C_n^n = 1$.

Чтобы начать привыкать к числам сочетаний, решите самостоятельно следующие задачи.

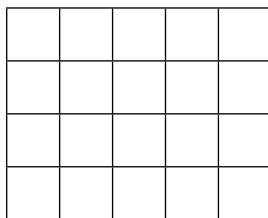
Задача 52. Сколько существует способов выбрать два карандаша из десяти имеющихся различных карандашей?

Задача 53. На листе бумаги отметили двадцать точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Сколько существует треугольников с вершинами в этих точках?

Задача 54. Сколько существует способов назначить дежурными четырёх человек из класса, в котором учатся 25 школьников?

Задача про паучка

Отвлечёмся немного от чисел сочетаний и рассмотрим следующий сюжет. Допустим, у нас есть лабиринт, который представляет собой набор клеток, образующих прямоугольник определённого размера. Например, 4×5 :



Пусть в левой верхней клетке сидит паучок, которому нужно попасть в правую нижнюю клетку. При этом ему разрешается перемещаться в соседнюю по стороне клетку, но только в двух направлениях —

либо вправо, либо вниз. Другие направления запрещены. И спрашивается, сколько существует способов добраться в нужную клетку?

Давайте решим задачу двумя способами: сперва — совсем по-детски, а потом — по-взрослому!

Если задача действительно такая, где заданы размеры прямоугольника и они не очень большие, то самое простое рассуждение такое. Давайте поймём, сколько существует способов добраться до каждой клетки прямоугольника. До исходной клетки есть лишь одна возможность добраться — просто стоять и ничего не делать.

1				

Очевидно, что в каждую клетку в первом горизонтальном ряду можно добраться лишь единственным способом — всегда идти вправо:

1	1	1	1	1

То же самое можно сказать и про первый вертикальный ряд. В любую его клетку можно прийти только одним способом — идти только вниз:

1	1	1	1	1
1				
1				
1				

Так, с этим разобрались. А сколько способов добраться в отмеченную клетку?

1	1	1	1	1
1	✓			
1				
1				

Можно, конечно, просто перебрать все возможные варианты. Их не так много: либо так $\rightarrow \downarrow$, либо так $\downarrow \rightarrow$. А если попробовать обойтись без перебора? Вот тут начинают работать комбинаторные соображения. Чтобы попасть в отмеченную клетку, нужно перед этим быть либо в клетке над ней, либо слева от неё. Но, как мы знаем, у нас есть ровно один способ оказаться в каждой из них. Потому существует $1 + 1 = 2$ способа попасть в нужную клетку. Потому что если мы попали в неё, то прямо перед этим мы были либо слева, либо сверху.

1	1	1	1	1
1	2			
1				
1				

А сколько существует способов попасть в следующую клетку во второй строке?

1	1	1	1	1
1	2	✓		
1				
1				

Чтобы попасть в неё, перед этим нужно быть либо в клетке над ней, либо в клетке слева от неё. Но мы знаем, что существует один способ оказаться над ней и два способа оказаться слева от неё. Значит, существует $1 + 2 = 3$ способа прийти в эту клетку.

1	1	1	1	1
1	2	3		
1				
1				

В итоге мы поняли, что в каждой клетке будет записано число, равное сумме чисел, стоящих сверху и слева от него. Поэтому мы легко сможем заполнить всю таблицу:

1	1	1	1	1
1	2	3	4	5
1	3	6	10	15
1	4	10	20	35

Таким образом, мы совсем по-детски решили задачу. У паучка есть 35 способов добраться до нужной клетки.

Как мы видим, если таблица небольшая, то задачу про паучка можно решить, просто постепенно её заполняя. Но даже для довольно большой таблицы можно продолжить рассуждение и заполнять, пока хватит сил:

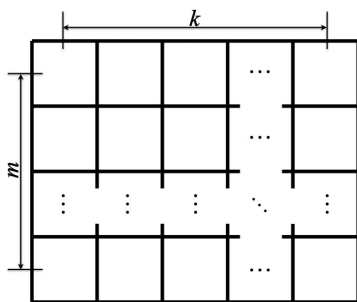
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
1	3	6	10	15	21	28	36	45		
1	4	10	20	35	56	84				
1	5	15	35	70						
1	6	21	56							
1	7	28	84							
1	8	36								
1	9									
1										

Никто не мешает нам и дальше продолжать так рассуждать и в итоге добраться до любой клетки в этой бесконечной в две стороны таблицы. Просто нужно соблюдать правило — *каждое следующее число равно сумме двух, стоящих сверху и слева от него*.

Но что делать, если размеры таблицы очень большие? Мы уже научились заполнять таблицу, но ещё

не понимаем, как написанные нами числа зависят от того, где они стоят. Пока явная закономерность не очень видна: например, в третьей строке в одной из клеток у нас написано 15, а двумя строчками ниже — 70. Как эти числа связаны между собой? А если размеры таблицы будут 100×100 , сможем ли мы сразу сказать, где какое число стоит? А если размеры таблицы вообще не заданы явно и нужно понять, сколько у паучка есть способов добраться до нужной клетки в зависимости от размеров таблицы? Другими словами, что нам нужно делать, если мы хотим вывести общую формулу? В этом случае наш «детский» метод явно не подходит.

Поэтому давайте решим немного по-другому. Пусть у нас есть та же таблица, но расстояние, которое паучку нужно будет преодолеть по вертикали, равно m , а по горизонтали — k , где m и k — некоторые натуральные числа.



То есть размеры самой таблицы будут $(m + 1) \times (k + 1)$, потому что m и k — это не количество клеток по вертикали и горизонтали, а количество клеток минус один — то, сколько нужно пройти по вертикали и по горизонтали от края до края.

Нам нужно оказаться в правом нижнем углу. Давайте считать количество способов это сделать. Мы понимаем, что, как бы мы ни шли, какой бы путь ни выбрали, нашему паучку придется сделать всего $(m + k)$ ходов. При этом у него будет ровно k горизонтальных ходов и ровно m вертикальных. И нам надо понять, сколько есть различных маршрутов.

Любой путь, который он может выбрать, состоит из последовательности шагов \rightarrow и \downarrow . Сначала сколько-то одних, потом сколько-то других и так далее. Это означает, что любой его маршрут можно записать таким образом:

$$\rightarrow \rightarrow \rightarrow \downarrow \downarrow \rightarrow \downarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \downarrow \downarrow \downarrow \rightarrow$$

Каждому маршруту можно сопоставить подобную последовательность стрелок, и по такой последовательности однозначно восстанавливается маршрут.

Какие есть условия на эту последовательность стрелок? Всего стрелок должно быть $(m + k)$, причём m вертикальных стрелок \downarrow , k — горизонтальных \rightarrow . И нам надо выяснить, сколько существует различных последовательностей, удовлетворяющих этим условиям. Посмотрите на эту последовательность стрелок. На что это похоже? Это же «слово»! Это слово из $(m + k)$ букв, среди которых m букв \downarrow и k букв \rightarrow . Количество таких слов, а значит, и количество различных маршрутов паучка, равно

$$\frac{(m + k)!}{m! \cdot k!}.$$

Видите, снова наша игра в слова! Хотя мы, конечно, могли обойтись и без неё. После того, как мы уже

поговорили про числа сочетаний, можно было просто сказать, что это число сочетаний из $(m + k)$ по k :

$$C_{m+k}^k = \frac{(m+k)!}{k! \cdot ((m+k)-k)!} = \frac{(m+k)!}{k! \cdot m!}.$$

Как можно было прийти к такому ответу? Смотрите. Любой путь паучка — это $(m + k)$ шагов. Представим, что мы ещё не придумали последовательность стрелок и у нас пока только такие заготовки

$$\underbrace{\square\square\square\square\square\square\square\dots\square\square}_{m+k},$$

вместо которых мы нарисуем наши стрелки.

У нас есть $(m + k)$ квадратиков, нам нужно выбрать, какие именно k из них мы заменим на стрелки \rightarrow :

$$\underbrace{\rightarrow\square\square\square\rightarrow\rightarrow\square\rightarrow\dots\square\rightarrow}_{m+k}$$

Существует C_{m+k}^k способов это сделать. Но как только мы выбрали, на каких шагах мы идём вправо, но на всех остальных мы идём вниз.

$$\underbrace{\rightarrow\downarrow\downarrow\downarrow\rightarrow\rightarrow\downarrow\rightarrow\dots\downarrow\rightarrow}_{m+k}$$

То есть, выбрав, на каких k из $(m + k)$ шагов мы идём вправо, мы однозначно задали маршрут. Потому количество маршрутов — это и есть C_{m+k}^k .

Так что к этому результату можно было прийти и так, но, кажется, проще рассуждать в терминах «игры в слова». К тому же это рассуждение проще переносится на случай больших размерностей. Представьте, что у вас не плоская таблица, а прямоуголь-

ный параллелепипед, и паучку разрешено двигаться в трёх направлениях. Сколько в таком случае способов добраться из одного угла в другой? Тут гораздо проще оперировать терминами «игры в слова», что есть всего столько-то шагов, из них столько-то должно быть горизонтальных, столько-то вертикальных, столько-то — по третьему направлению. Подобные рассуждения легко переносятся и на более содержательные задачи.

Но мы отвлеклись. Вернёмся к нашему «плоскому» паучку. Что же у нас получилось? А получилось, что если решать задачу про паучка не «детским» способом, просто расставляя числа в клетки, а честно посчитать, то становится ясно, что в каждой клетке у нас стоит какое-то число сочетаний. Например, для исходной задачи с таблицей 4×5

$$m = 4 - 1 = 3, \quad k = 5 - 1 = 4.$$

То есть паучку нужно сделать четыре хода вправо и три хода вниз. Поэтому ответ

$$C_7^4 = \frac{7!}{4! \cdot 3!} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7}{3!} = 35.$$

То есть число 35, которое у нас получилось при первом подходе, — это число сочетаний из семи по четыре.

Точно так же мы можем написать в каждую из клеток таблицы соответствующее число сочетаний. Например, в самой первой клетке, когда мы ещё никуда не пошли, $k = 0, m = 0$. Значит, там будет C_0^0 . И, сделав так для каждой клетки, мы можем вновь полностью заполнить таблицу:

C_0^0	C_1^1	C_2^2	C_3^3	C_4^4
C_1^0	C_2^1	C_3^2	C_4^3	C_5^4
C_2^0	C_3^1	C_4^2	C_5^3	C_6^4
C_3^0	C_4^1	C_5^2	C_6^3	C_7^4

Но мы можем продолжить и дальше, как мы это делали в «детском» решении, и вновь заполнить эту бесконечную в две стороны таблицу. Давайте сделаем это и посмотрим, что же получилось в результате этих двух подходов:

1	1	1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6	7	
1	3	6	10	15	21		
1	4	10	20	35			
1	5	15	35				
1	6	21					
1	7						
1							

C_0^0	C_1^1	C_2^2	C_3^3	C_4^4	C_5^5	C_6^6	C_7^7
C_1^0	C_2^1	C_3^2	C_4^3	C_5^4	C_6^5	C_7^6	
C_2^0	C_3^1	C_4^2	C_5^3	C_6^4	C_7^5		
C_3^0	C_4^1	C_5^2	C_6^3	C_7^4			
C_4^0	C_5^1	C_6^2	C_7^3				
C_5^0	C_6^1	C_7^2					
C_6^0	C_7^1						
C_7^0							

Мы дважды решили одну и ту же задачу про паучка. И с одной стороны, получается бесконечная в две стороны таблица, которая состоит из таких чисел, что каждое из них равняется сумме чисел, стоящих вверху и слева от него. А с другой стороны — это таблица, состоящая из чисел сочетаний. И вот тут мы добрались до треугольника Паскаля! Полученная нами таблица и называется треугольником Паскаля. Только обычно её поворачивают на 45° :

$$\begin{array}{cccccccc}
 & & & & 1 & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
 1 & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
 & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 \\
 1 & & 1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1 \\
 & & & & & & & & & & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & & & & & & & & & & \dots
 \end{array}$$

Или соответственно в терминах чисел сочетаний:

$$\begin{array}{cccccccc}
 & & & & C_0^0 & & & \\
 & & & & & C_1^0 & & C_1^1 \\
 & & & C_2^0 & & C_2^1 & & C_2^2 \\
 & & C_3^0 & & C_3^1 & & C_3^2 & & C_3^3 \\
 & C_4^0 & & C_4^1 & & C_4^2 & & C_4^3 & & C_4^4 \\
 C_5^0 & & C_5^1 & & C_5^2 & & C_5^3 & & C_5^4 & & C_5^5 \\
 & C_6^0 & & C_6^1 & & C_6^2 & & C_6^3 & & C_6^4 & & C_6^5 & & C_6^6 \\
 C_7^0 & & C_7^1 & & C_7^2 & & C_7^3 & & C_7^4 & & C_7^5 & & C_7^6 & & C_7^7 \\
 & & & & & & & & & & & & & & & & \dots
 \end{array}$$

Благодаря нашей задаче про паучка мы знаем, что любое число в треугольнике Паскаля (не считая единиц по бокам) равно сумме двух чисел, стоящих над ним. С другой стороны, каждое число в треугольнике Паскаля — это какое-то число сочетаний. Поэтому и для чисел сочетаний верно, что любое из них равно сумме двух стоящих над ним:

$$C_{n+1}^{k+1} = C_n^k + C_n^{k+1}$$

На самом деле это важное равенство про числа сочетаний можно доказать и без задачи про паучка. Самое простое рассуждение такое. Пусть есть группа из $(n + 1)$ человека и из неё нужно выбрать $(k + 1)$ человека, и спрашивают, сколько существует способов это сделать. С одной стороны, мы знаем, что ответ будет C_{n+1}^{k+1} . Но давайте посчитаем по-другому. Давайте выберем одного человека и наденем на него красную шапочку, чтобы отличать от остальных. И дальше все способы выбрать из этой нашей группы $(k + 1)$ человека разобьём на два случая в зависимости от того, взяли мы человека в шапочке или не взяли.

Если мы его взяли, то нам осталось выбрать ещё k человек из оставшихся n . И сделать это мы можем C_n^k способами. Если же мы не берём того, который в красной шапочке, то нам нужно из оставшихся n человек выбрать $(k + 1)$ человека. А это сделать мы можем C_n^{k+1} способами. Таким образом, количество способов из $(n + 1)$ человека выбрать $(k + 1)$ складывается из двух случаев: когда мы взяли человека в красной шапочке и когда мы его не взяли. И чтобы получить общее количество способов, нужно сло-

жить эти два независимых набора случаев. В итоге мы получили, что

$$C_{n+1}^{k+1} = C_n^k + C_n^{k+1}.$$

Тоже красивый способ доказать эту формулу, но задача про паучка мне нравится больше.

Более того, такие формулы можно доказывать и чисто алгебраически. Смотрите, мы хотим доказать, что

$$C_{n+1}^{k+1} = C_n^k + C_n^{k+1}.$$

Если мы вспомним, чему равны числа сочетаний, то доказываемое равенство перепишется так:

$$\begin{aligned} & \frac{(n+1)!}{(k+1)! \cdot ((n+1) - (k+1))!} = \\ & = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)! \cdot (n - (k+1))!}; \\ & \frac{(n+1)!}{(k+1)! \cdot (n-k)!} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)! \cdot (n-k-1)!}. \end{aligned}$$

Разделим левую и правую часть на $n!$:

$$\frac{n+1}{(k+1)! \cdot (n-k)!} = \frac{1}{k! \cdot (n-k)!} + \frac{1}{(k+1)! \cdot (n-k-1)!};$$

домножим на $(k+1)!$:

$$\frac{n+1}{(n-k)!} = \frac{k+1}{(n-k)!} + \frac{1}{(n-k-1)!};$$

домножим на $(n-k)!$:

$$n+1 = (k+1) + (n-k).$$

И получили верное равенство. Значит, и исходное равенство было верно!

Но мне кажется, что так доказывать комбинаторные равенства скучно — совсем непонятно, почему же у нас всё сошлось. Лучше стараться доказывать равенства с числами сочетаний из чисто комбинаторных соображений.

Опять бином

В этой главе мы с вами ввели понятие *числа сочетаний* как количества способов из n объектов выбрать k ; заметили, что получилось ровно то же самое, что было в качестве коэффициентов в формуле бинома Ньютона; и, решив задачу про паучка, мы узнали, как связаны между собой числа сочетаний. А сейчас мы получим ещё один способ доказательства формулы бинома Ньютона, чтобы вы смогли лучше почувствовать связь между ней и треугольником Паскаля.

Давайте попробуем формулу бинома Ньютона вывести, просто перебирая маленькие показатели степени. Что такое $(a + b)^2$?

$$\begin{aligned}(a + b)^2 &= (a + b) \cdot (a + b) = a \cdot (a + b) + b \cdot (a + b) = \\ &= a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + (1 + 1) \cdot ab + b^2 = \\ &= a^2 + 2ab + b^2.\end{aligned}$$

То есть у $(a + b)^1 = a + b$ коэффициенты были

$$1 \quad 1,$$

а у $(a + b)^2$ коэффициенты стали

$$1 \quad 2 \quad 1.$$

Что такое $(a + b)^3$?

$$\begin{aligned}
 (a + b)^3 &= (a + b) \cdot (a + b)^2 = (a + b) \cdot (a^2 + 2ab + b^2) = \\
 &= a \cdot (a^2 + 2ab + b^2) + b \cdot (a^2 + 2ab + b^2) = \\
 &= a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3 = \\
 &= a^3 + (2 + 1) \cdot a^2b + (1 + 2) \cdot ab^2 + b^3 = \\
 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.
 \end{aligned}$$

Тут получаются коэффициенты:

$$1 \quad 3 \quad 3 \quad 1.$$

Почему они такие? Можно ли было это понять, не раскрывая скобки? Давайте сделаем ещё один шаг.

Давайте попробуем то же самое сделать для $(a + b)^4$, только теперь в уме:

$$\begin{aligned}
 (a + b)^4 &= (a + b) \cdot (a + b)^3 = \\
 &= (a + b) \cdot (a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3).
 \end{aligned}$$

Какой коэффициент будет при a^4 ? Очевидно, a^4 будет только здесь:

$$(a + b) \cdot (a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3).$$

То есть

$$(a + b)^4 = a^4 + \dots$$

А откуда берётся a^3b ? Во-первых, они есть здесь, три штуки:

$$(a + b) \cdot (a^3 + \mathbf{3a^2b} + 3ab^2 + b^3),$$

а ещё одна здесь:

$$(a + \mathbf{b}) \cdot (a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3)$$

То есть

$$(a + b)^4 = a^4 + (3 + 1) \cdot a^3b + \dots$$

Откуда возьмётся a^2b^2 ? Здесь три штуки:

$$(a + b) \cdot (a^3 + 3a^2b + \mathbf{3ab^2} + b^3),$$

и здесь ещё три:

$$(a + \mathbf{b}) \cdot (a^3 + \mathbf{3a^2b} + 3ab^2 + b^3).$$

Получается

$$(a + b)^4 = a^4 + (3 + 1) \cdot a^3b + (3 + 3) \cdot a^2b^2 + \dots$$

Откуда возьмётся ab^3 ? Здесь один:

$$(a + b) \cdot (a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + \mathbf{b^3}),$$

и здесь три:

$$(a + \mathbf{b}) \cdot (a^3 + 3a^2b + \mathbf{3ab^2} + b^3).$$

То есть

$$(a + b)^4 = a^4 + (3 + 1) \cdot a^3b + \\ + (3 + 3) \cdot a^2b^2 + (1 + 3) \cdot ab^3 + \dots$$

Ну и b^4 будет только здесь:

$$(a + \mathbf{b})(a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + \mathbf{b^3}).$$

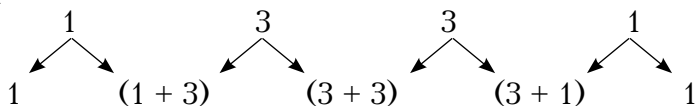
В итоге получаем

$$(a + b)^4 = a^4 + (3 + 1) \cdot a^3b + \\ + (3 + 3) \cdot a^2b^2 + (1 + 3) \cdot ab^3 + b^4.$$

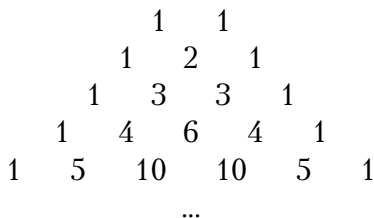
Таким образом, мы не только видим, что в последней формуле коэффициенты получаются

$$1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1,$$

но мы видим, откуда они взялись! Каждый коэффициент получается из коэффициентов предыдущего разложения:



То есть если мы будем расписывать, откуда взялись коэффициенты у каждого следующего разложения, то увидим, что каждый коэффициент равен сумме двух коэффициентов из предыдущего разложения, причём понятно каких. И так становится ясно, что коэффициенты у бинома устроены так, что у следующего разложения коэффициенты получаются из сумм коэффициентов у предыдущего разложения:



А это и есть треугольник Паскаля! А в треугольнике Паскаля, как мы поняли благодаря задачке про паучка, стоят числа сочетаний.

Что мы в итоге уже знаем к этому моменту?

- **Что такое биномиальные коэффициенты?**

Это просто коэффициенты, которые получаются при разложении $(a + b)^n$. Мы всего лишь раскрыли скобки, привели подобные члены и коэффициенты, которые в итоге образовались, назвали биномиальными коэффициентами.

- **Что такое числа сочетаний?**

Это просто количество способов из n различных объектов выбрать некоторые k .

- **Что такое треугольник Паскаля?**

Это такой бесконечный треугольник из чисел, по бокам которого стоят единички и каждое число равняется сумме двух, стоящих над ним.

И на первый взгляд кажется, что есть три разных объекта. Но в этой главе мы установили, что, по сути, это одно и то же. Это главное, что нужно вынести из этой главы, — понять, что это всё едино, мы просто с разных сторон смотрели на один и тот же объект!

Бином решает

Закончим главу тем, что обсудим, как бином Ньютона помогает в разных задачах.

Начнём с совсем простого. Если вы уже освоились с биномом Ньютона и треугольником Паскаля, то вы никогда не забудете, чему равно 11^2 , 11^3 , 11^4 . Потому что

$$11^2 = (10 + 1)^2 = 10^2 + 2 \cdot 10 + 1 = 121;$$

$$11^3 = (10 + 1)^3 = 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + 1 = 1331;$$

$$\begin{aligned} 11^4 &= (10 + 1)^4 = \\ &= 10^4 + 4 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10 + 1 = 14641. \end{aligned}$$

В правой части буквально вырисовывается треугольник Паскаля.

Для больших степеней всё уже не так красиво, потому что там некоторые числа сочетания становятся больше девяти, и нужно учитывать переходы в разрядах. Но посчитать 11^5 в уме, думаю, у вас получится.

Следующие задачи показывают, как знание бинома Ньютона помогает в довольно сложных ситуациях.

Задача 55. На сколько нулей оканчивается число $(11^{100} - 1)$?

Решение. Воспользуемся формулой бинома Ньютона:

$$11^{100} = (1+10)^{100} = 1 + C_{100}^1 \cdot 10 + C_{100}^2 \cdot 10^2 + \\ + \dots + C_{100}^{99} \cdot 10^{99} + 10^{100}.$$

Поэтому

$$11^{100} - 1 = C_{100}^1 \cdot 10 + C_{100}^2 \cdot 10^2 + \dots + C_{100}^{99} \cdot 10^{99} + 10^{100}.$$

Давайте изучим каждое слагаемое:

$$C_{100}^1 \cdot 10 = 100 \cdot 10 = 1000;$$

$$C_{100}^2 \cdot 10^2 = \frac{100 \cdot 99}{2} \cdot 100 = 4950 \cdot 100 = 495\,000;$$

$$C_{100}^3 \cdot 10^3 = \frac{100 \cdot 99 \cdot 98}{6} \cdot 1000 = 161\,700 \cdot 1000 = 161\,700\,000.$$

У всех остальных слагаемых будет как минимум четыре нуля в конце, потому что каждое из них имеет вид $C_{100}^k \cdot 10^k$, где $k \geq 4$, а C_{100}^k — целое число. Поэтому

$$\begin{aligned} 11^{100} - 1 &= 1000 + 495\,000 + N \cdot 10\,000 = \\ &= 496\,000 + N \cdot 10\,000, \end{aligned}$$

то есть число $(11^{100} - 1)$ оканчивается на цифры
... 6000.

А значит, в конце будет три нуля.

Ответ. На три нуля.

Задача 56. Найдите первые 50 знаков после запятой в десятичной записи чисел $(2 + \sqrt{3})^{100}$ и $(2 - \sqrt{3})^{100}$.

Решение. Воспользуемся формулой бинома Ньютона:

$$\begin{aligned} (2 + \sqrt{3})^{100} &= \\ &= 2^{100} + C_{100}^1 \cdot 2^{99} \cdot \sqrt{3} + C_{100}^2 \cdot 2^{98} \cdot (\sqrt{3})^2 + \\ &\quad + \dots + C_{100}^{99} \cdot 2 \cdot (\sqrt{3})^{99} + (\sqrt{3})^{100}. \end{aligned}$$

Так как $(\sqrt{3})^2 = 3$, то тут чередуются рациональные и иррациональные слагаемые. Сгруппируем их в две суммы:

$$\begin{aligned} (2 + \sqrt{3})^{100} &= \\ &= (2^{100} + C_{100}^2 \cdot 2^{98} \cdot 3 + C_{100}^4 \cdot 2^{96} \cdot 3^2 + \dots + \\ &\quad + C_{100}^{98} \cdot 2^2 \cdot 3^{49} + 3^{50}) + \\ &\quad + \sqrt{3} \cdot (C_{100}^1 \cdot 2^{99} + C_{100}^3 \cdot 2^{97} \cdot 3 + \dots + \\ &\quad + C_{100}^{97} \cdot 2^3 \cdot 3^{48} + C_{100}^{99} \cdot 2 \cdot 3^{49}). \end{aligned}$$

Прделаем то же самое с выражением $(2 - \sqrt{3})^{100}$:

$$\begin{aligned}
 & (2 - \sqrt{3})^{100} = \\
 & = 2^{100} - C_{100}^1 \cdot 2^{99} \cdot \sqrt{3} + C_{100}^2 \cdot 2^{98} \cdot (\sqrt{3})^2 - \dots - \\
 & \quad - C_{100}^{99} \cdot 2 \cdot (\sqrt{3})^{99} + (\sqrt{3})^{100} = \\
 & = (2^{100} + C_{100}^2 \cdot 2^{98} \cdot 3 + C_{100}^4 \cdot 2^{96} \cdot 3^2 + \dots + \\
 & \quad + C_{100}^{98} \cdot 2^2 \cdot 3^{49} + 3^{50}) - \\
 & \quad - \sqrt{3} \cdot (C_{100}^1 \cdot 2^{99} + C_{100}^3 \cdot 2^{97} \cdot 3 + \dots + \\
 & \quad + C_{100}^{97} \cdot 2^3 \cdot 3^{48} + C_{100}^{99} \cdot 2 \cdot 3^{49}).
 \end{aligned}$$

Мы получили, что

$$(2 + \sqrt{3})^{100} = n + m\sqrt{3}, \quad (2 - \sqrt{3})^{100} = n - m\sqrt{3},$$

где n и m — натуральные числа.

Значит, $(2 + \sqrt{3})^{100} = 2n - (2 - \sqrt{3})^{100}$. Давайте поймём, какие знаки после запятой у числа $(2 - \sqrt{3})^{100}$.

Так как $(2 + \sqrt{3}) \cdot (2 - \sqrt{3}) = 2^2 - (\sqrt{3})^2 = 4 - 3 = 1$, то

$$\begin{aligned}
 (2 - \sqrt{3})^{100} &= \frac{1}{(2 + \sqrt{3})^{100}} = \frac{1}{((2 + \sqrt{3})^2)^{50}} = \\
 &= \frac{1}{(4 + 4\sqrt{3} + 3)^{50}} < \frac{1}{10^{50}}.
 \end{aligned}$$

Это значит, что у числа $(2 - \sqrt{3})^{100}$ первые 50 знаков после запятой — нули. А число $(2 + \sqrt{3})^{100}$ менее, чем на $\frac{1}{10^{50}}$ меньше целого числа $2n$. То есть, у него как минимум 50 девяток сразу после запятой.

Ответ. Первые 50 знаков после запятой числа $(2 + \sqrt{3})^{100}$ — девятки, а первые 50 знаков числа $(2 - \sqrt{3})^{100}$ — нули.

Попробуйте самостоятельно решить аналогичную задачу.

Задача 57. Найдите первые 600 знаков после запятой в десятичной записи числа $(2 + \sqrt{5})^{1001}$.

ГЛАВА 4

НЕОЖИДАННЫЕ СВЯЗИ



В прошлой главе мы несколькими способами доказали основное свойство чисел сочетаний:

$$C_{n+1}^{k+1} = C_n^k + C_n^{k+1}$$

В этой главе докажем ещё несколько свойств, стараясь каждый раз обсуждать несколько возможных подходов к доказательству.

Два важных равенства

Задача 58. Докажите, что для любых целых n и k , таких, что $0 \leq k \leq n$, справедливо равенство $C_n^{n-k} = C_n^k$.

Первое решение. Достаточно формально расписать, чему равны левая и правая части:

$$C_n^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot (n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!},$$

$$C_n^k = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}.$$

Осталось заметить, что это одно и то же.

Второе решение. Но интереснее понимать такие равенства чисто комбинаторно. Пусть есть n человек, из которых нам нужно выбрать k . Пусть мы сделали какой-то выбор и отвели их в сторону. Тем самым мы выбрали $(n - k)$ человек, которых мы оставили на месте. То есть каждому способу выбрать k человек можно сопоставить способ выбрать оставшихся $(n - k)$ человек. А значит, количество способов из n выбрать k и количество способов из n выбрать $(n - k)$ одинаковые:

$$C_n^{n-k} = C_n^k$$

Задача 59. Докажите, что для любого натурального n справедливо равенство

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 2^n.$$

Первое решение. Вспомним формулу бинома Ньютона:

$$(a + b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^n b^n.$$

Если в неё подставить $a = b = 1$, то получится

$$2^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n.$$

Доказали!

Второе решение. Но мы же с вами любим доказывать по-другому!

Пусть у нас есть n человек, тогда

- C_n^0 — количество способов выбрать из них ноль человек;
- C_n^1 — количество способов выбрать из них одного человека;

- C_n^2 — количество способов выбрать из них два человека;
- ...
- C_n^n — количество способов выбрать из них n человек.

То есть $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n$ — количество способов выбрать из n человек группу, когда нам не важно, сколько в ней будет человек, — любое количество от нуля до n .

Давайте посчитаем это иначе. Выстроим все n человек в ряд и про каждого решим — берём мы его или нет. У нас есть два варианта для первого, два варианта для второго и так далее. Получается ровно то же самое, что и в задаче 18 про монетку, которую подкинули несколько раз, — 2^n . В итоге мы одно и то же посчитали двумя разными способами, а значит

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 2^n.$$

На схеме ниже изображены две такие суммы в треугольнике Паскаля.

Здесь видно, как получается $2^4 = 16$ и $2^6 = 64$.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \rightarrow 16 \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 \rightarrow 64 \\
 1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1
 \end{array}$$

Подсчёт двумя способами

Как мы видим, некоторые формулы, связывающие между собой числа сочетаний, появляются «случайно», когда мы одно и то же посчитали двумя разными способами. Давайте точно так же получим ещё несколько формул.

Задача 60. Сколько существует способов из n человек выбрать команду, состоящую из k человек, и назначить одного из них капитаном команды?

Первое решение. Существует C_n^k способов выбрать команду, состоящую из k человек. После этого есть k способов решить, кто будет её капитаном. Поэтому всего существует kC_n^k способов из n человек выбрать команду, состоящую из k человек, и назначить одного из них капитаном команды.

Второе решение. Можно сначала из всех n человек выбрать того, кто будет капитаном будущей команды. Есть n способов это сделать. А потом из оставшихся $(n - 1)$ человек выбрать остальных $(k - 1)$ членов команды — C_{n-1}^{k-1} способов. То есть всего существует nC_{n-1}^{k-1} способов из n человек выбрать команду, состоящую из k человек, и назначить одного из них капитаном команды.

Ответ. kC_n^k способов или nC_{n-1}^{k-1} способов.

Мы решили одну и ту же задачу и получили два на первый взгляд разных ответа. Это означает, что $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$, или

$$C_{n-1}^{k-1} = \frac{k}{n} \cdot C_n^k$$

Хотя, опять же, это свойство можно было доказать формально:

$$\begin{aligned} \frac{k}{n} \cdot C_n^k &= \frac{k}{n} \cdot \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{k}{n} \cdot \frac{n \cdot (n-1)!}{k \cdot (k-1)! \cdot (n-k)!} = \\ &= \frac{(n-1)!}{(k-1)! \cdot (n-k)!} = C_{n-1}^{k-1}. \end{aligned}$$

Давайте рассмотрим обобщение предыдущей задачи.

Задача 61. Сколько существует способов из n человек выбрать команду, состоящую из k человек, а внутри её выбрать штаб, в котором будет m человек? (Предполагается, что $n \geq k \geq m \geq 0$.)

Первое решение. Существует C_n^k способов выбрать команду, состоящую из k человек. После этого есть C_k^m способов из этих k человек выбрать штаб. Поэтому всего существует $C_n^k \cdot C_k^m$ способов из n человек выбрать команду, состоящую из k человек, а внутри её выбрать штаб, в котором будет m человек.

Второе решение. Можно сначала из всех n человек выбрать штаб, в котором будет m человек. Это можно сделать C_n^m способами. А потом из оставшихся $(n-m)$ человек выбрать остальных $(k-m)$ членов команды — C_{n-m}^{k-m} способов. То есть всего существует $C_n^m \cdot C_{n-m}^{k-m}$ способов из n человек выбрать команду,

состоящую из k человек, а внутри её выбрать штаб, в котором будет m человек.

Ответ. $C_n^k \cdot C_k^m$ способов или $C_n^m \cdot C_{n-m}^{k-m}$ способов.

Опять же мы решили одну и ту же задачу и получили два разных ответа. Это означает, что

$$C_n^k \cdot C_k^m = C_n^m \cdot C_{n-m}^{k-m}$$

Но и это свойство можно было доказать формально. Достаточно расписать, чему равны левая и правая части равенства:

$$C_n^k \cdot C_k^m = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \cdot \frac{k!}{m! \cdot (k-m)!} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot m! \cdot (k-m)!},$$

$$\begin{aligned} C_n^m \cdot C_{n-m}^{k-m} &= \frac{n!}{m! \cdot (n-m)!} \cdot \frac{(n-m)!}{(k-m)! \cdot ((n-m)-(k-m))!} = \\ &= \frac{n!}{m! \cdot (k-m)! \cdot (n-k)!}. \end{aligned}$$

И получается одно и то же выражение.

Задача 62. В классе 15 мальчиков и 15 девочек. Сколько существует способов выбрать из них команду, в которой будет поровну мальчиков и девочек? Считайте, что в команде не может быть ноль человек.

Первое решение. Можно просто перебрать:

- существует $C_{15}^1 \cdot C_{15}^1$ команд, в которых один мальчик и одна девочка;
- существует $C_{15}^2 \cdot C_{15}^2$ команд, в которых два мальчика и две девочки;

- существует $C_{15}^3 \cdot C_{15}^3$ команд, в которых три мальчика и три девочки;
- ...
- существует $C_{15}^{14} \cdot C_{15}^{14}$ команд, в которых 14 мальчиков и 14 девочек;
- существует $C_{15}^{15} \cdot C_{15}^{15}$ команд, в которых 15 мальчиков и 15 девочек.

Итого получаем, что существует

$$(C_{15}^1)^2 + (C_{15}^2)^2 + (C_{15}^3)^2 + \dots + (C_{15}^{15})^2$$

способов выбрать из класса команду, в которой будет поровну мальчиков и девочек.

Второе решение. Но давайте решим по-другому. Пусть мы определились с командой. Давайте на каждого мальчика, которого мы взяли, наденем синюю шапочку, а на каждого, которого не взяли, — красную. А с девочками поступим наоборот: на каждую, которую мы взяли, наденем красную шапочку, а на каждую, которую не взяли, — синюю. Но так как мы взяли поровну мальчиков и девочек, то количество мальчиков в синих шапочках такое же, как количество девочек в красных. И наоборот. Это значит, что всего на всех детях поровну красных и синих шапочек. То есть по 15 штук.

Таким образом мы поняли, что каждому способу выбрать команду соответствует способ надеть на ребят в классе 15 синих и 15 красных шапочек (мы берем в команду мальчиков в синих шапочках и девочек в красных). А таких способов будет C_{30}^{15} . Вроде бы это и есть ответ. Но мы забыли учесть, что если

мы наденем на всех мальчиков красные шапочки, а на всех девочек — синие, то в команде не будет никого, а это запрещено условием. Поэтому окончательный ответ: $(C_{30}^{15} - 1)$.

Ответ. $(C_{15}^1)^2 + (C_{15}^2)^2 + (C_{15}^3)^2 + \dots + (C_{15}^{15})^2$ способов или $(C_{30}^{15} - 1)$ способ.

Давайте поймём, что мы получили. В результате решения задачи мы поняли, что

$$(C_{15}^1)^2 + (C_{15}^2)^2 + (C_{15}^3)^2 + \dots + (C_{15}^{15})^2 = C_{30}^{15} - 1.$$

То есть

$$1 + (C_{15}^1)^2 + (C_{15}^2)^2 + (C_{15}^3)^2 + \dots + (C_{15}^{15})^2 = C_{30}^{15}.$$

Или, представив 1 как $(C_{15}^0)^2$:

$$(C_{15}^0)^2 + (C_{15}^1)^2 + (C_{15}^2)^2 + (C_{15}^3)^2 + \dots + (C_{15}^{15})^2 = C_{30}^{15}.$$

Очевидно, что ровно так же доказывается и общее утверждение:

$$(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \dots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n$$

Задача 63. Докажите, что при всех целых $0 \leq k \leq m \leq n$ выполнено равенство

$$C_n^0 C_m^k + C_n^1 C_m^{k-1} + C_n^2 C_m^{k-2} + \dots + C_n^{k-1} C_m^1 + C_n^k C_m^0 = C_{n+m}^k.$$

Решение. Представим такую ситуацию. Пусть у нас есть $(n + m)$ детей, среди которых n девочек и m мальчиков. И пусть нам нужно выбрать из них группу, состоящую из k детей. Сколько всего существует возможных групп? С одной стороны, их очевидно C_{n+m}^k , так как мы просто из $(n + m)$ детей должны выбрать некоторых k детей. Но, с другой стороны,

- существует $C_n^0 \cdot C_m^k$ групп, в которых ноль девочек и k мальчиков;
- существует $C_n^1 \cdot C_m^{k-1}$ групп, в которых одна девочка и $(k - 1)$ мальчик;
- существует $C_n^2 \cdot C_m^{k-2}$ групп, в которых две девочки и $(k - 2)$ мальчика;
- ...
- существует $C_n^{k-1} \cdot C_m^1$ групп, в которых $(k - 1)$ девочка и один мальчик;
- существует $C_n^k \cdot C_m^0$ групп, в которых k девочек и ноль мальчиков.

Значит, всего существует

$$C_n^0 C_m^k + C_n^1 C_m^{k-1} + C_n^2 C_m^{k-2} + \dots + C_n^{k-1} C_m^1 + C_n^k C_m^0$$

различных групп, состоящих из k детей.

В итоге мы одно и то же посчитали двумя способами, поэтому

$$C_n^0 C_m^k + C_n^1 C_m^{k-1} + \dots + C_n^k C_m^0 = C_{n+m}^k$$

Заметим, что если в последнем равенстве взять $k = m = n$, то получится

$$C_n^0 C_n^n + C_n^1 C_n^{n-1} + C_n^2 C_n^{n-2} \dots + C_n^{n-1} C_n^1 + C_n^n C_n^0 = C_{2n}^n.$$

А теперь, воспользовавшись тем, что

$$C_n^n = C_n^0, \quad C_n^{n-1} = C_n^1, \quad C_n^{n-2} = C_n^2, \quad C_n^{n-3} = C_n^3, \quad \dots$$

получим

$$(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + (C_n^2)^2 + \dots + (C_{n-1}^n)^2 + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n.$$

Тем самым мы получили ещё одно доказательство предыдущей формулы.

Соотношения в треугольнике Паскаля

Задача 64. Докажите, что в каждой строчке треугольника Паскаля сумма чисел, стоящих на чётных местах, равна сумме чисел, стоящих на нечётных местах.

Решение. Если посмотреть на некоторые строчки треугольника Паскаля, то может показаться, что и доказывать нечего:

$$\begin{array}{ccccccc} & & 1 & 3 & 3 & 1 & \\ & 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \\ 1 & 7 & 21 & 35 & 35 & 21 & 7 & 1 \end{array}$$

Действительно, строчка симметрична, числа разбиваются на пары одинаковых, одно из которых идёт в одну сумму, а второе — в другую. Но это работает только на нечётных строчках. На чётных всё уже не так очевидно:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 1 & 2 & 1 & & \\
 & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & \\
 1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1
 \end{array}$$

Конечно, мы видим, например, что

$$1 + 15 + 15 + 1 = 32 = 6 + 20 + 6,$$

но непонятно, почему это так происходит.

Давайте обсудим несколько способов, как это можно доказать.

Первое решение. Самое наглядное решение — посмотреть внимательно на две соседние строчки треугольника Паскаля:

$$\begin{array}{cccccccc}
 1 & 7 & 21 & 35 & 35 & 21 & 7 & 1 \\
 1 & 8 & 28 & 54 & 70 & 54 & 28 & 8 & 1
 \end{array}$$

Если мы вспомним основное свойство чисел сочетаний, то поймём, что сумма чисел, стоящих на нечётных местах

$$\begin{aligned}
 & 1 + 28 + 70 + 28 + 1 = \\
 & = 1 + (7 + 21) + (35 + 35) + (21 + 7) + 1 = \\
 & = 1 + 7 + 21 + 35 + 35 + 21 + 7 + 1,
 \end{aligned}$$

равна сумме всех чисел в предыдущей строчке треугольника Паскаля. И сумма чисел, стоящих на чётных местах

$$\begin{aligned}
 & 8 + 54 + 54 + 8 = \\
 & = (1 + 7) + (21 + 35) + (35 + 21) + (7 + 1) = \\
 & = 1 + 7 + 21 + 35 + 35 + 21 + 7 + 1,
 \end{aligned}$$

тоже равна сумме чисел в предыдущей строчке треугольника Паскаля! Поэтому эти суммы равны друг другу.

Второе решение. Давайте сравним количество способов выбрать из n человек группу, в которой будет нечётное количество человек, и количество способов выбрать группу, в которой будет чётное (возможно, нулевое) количество человек.

Выберем любого человека и наденем на него красную шапочку. Рассмотрим любую группу без этого человека. Если мы в неё добавим человека в красной шапочке, то чётность количества участников группы изменится. Это означает, что все возможные группы разбиваются на пары (группы в паре отличаются лишь наличием или отсутствием человека в красной шапочке) с разной чётностью количества участников. Поэтому количество различных групп, в которых нечётное количество человек, такое же, как и количество групп, в которых чётное количество человек. Но количество различных групп, в которых нечётное количество человек, равно

$$C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \dots,$$

а количество различных групп, в которых чётное количество человек, равно

$$C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \dots.$$

А это и означает, что в каждой строчке треугольника Паскаля сумма чисел, стоящих на чётных местах, равна сумме чисел, стоящих на нечётных местах.

Третье решение. На самом деле, если знать формулу бинома Ньютона, то можно получить самое простое, но довольно скучное решение.

Подставив в формулу

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^n b^n$$

значения $a = 1$ и $b = -1$, получим

$$0 = C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \dots + (-1)^n \cdot C_n^n.$$

Или

$$C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \dots = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \dots$$

А именно это нам и нужно было доказать.

Решая эту задачу, мы получили ещё одну интересную формулу

$$C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \dots + (-1)^n C_n^n = 0$$

Для следующей формулы мне нужно будет чуть-чуть рассказать вам про числа Фибоначчи. *Числа Фибоначчи* — это последовательность чисел, первые два члена которой равны единице, а каждый следующий член равен сумме двух предыдущих:

$$F_1 = F_2 = 1, \quad F_n = F_{n-2} + F_{n-1} \text{ при } n \geq 3.$$

То есть члены этой последовательности равны

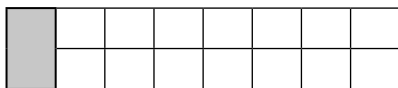
1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ...

Задача 65. Сколько существует способов замостить доску $2 \times n$ доминошками 1×2 ?

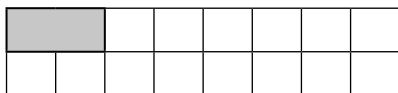
Решение первое. Посмотрим на левый верхний угол доски $2 \times n$:

✓							

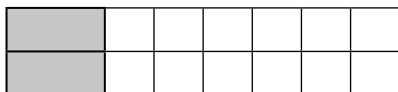
Очевидно, что покрыть эту клетку доминошкой можно только двумя способами. Либо положив в угол вертикальную доминошку:



либо горизонтальную:



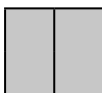
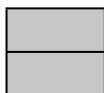
В первом случае мы свели задачу к замощению доминошками доски $2 \times (n - 1)$. Во втором случае видно, что покрыть левый нижний угол можно лишь горизонтальной доминошкой:



Значит, в этом случае задача свелась к замощению доминошками доски $2 \times (n - 2)$.

Давайте через x_n обозначим количество способов замостить доску $2 \times n$ доминошками 1×2 . Тогда мы только что доказали, что при $n \geq 3$ справедливо равенство $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$.

При этом очевидно, что существует ровно один способ замостить доску 2×1 доминошками 1×2 , ровно два способа замостить доску 2×2 доминошками 1×2 :



Значит, $x_1 = 1$ и $x_2 = 2$. Поэтому

$$x_3 = x_2 + x_1 = 2 + 1 = 3;$$

$$x_4 = x_3 + x_2 = 3 + 2 = 5;$$

$$x_5 = x_4 + x_3 = 5 + 3 = 8;$$

$$x_6 = x_5 + x_4 = 8 + 5 = 13;$$

...





То есть $x_n = F_{n+1}$. Значит, существует F_{n+1} способ замостить доску $2 \times n$ доминошками 1×2 .

Решение второе. Очевидно, что если на доске присутствуют горизонтальные доминошки, то они все разбиваются на пары доминошек, расположенных одна над другой:



Значит, таких доминошек чётное количество.

Рассмотрим несколько случаев:

- Если горизонтальных доминошек нет, то существует ровно один способ замостить доску.
- Если есть две горизонтальные доминошки, то на доску нужно положить одну фигурку  и $(n - 2)$ фигурки  в некотором порядке. Это можно сделать $\frac{(n-1)!}{1! \cdot (n-2)!} = C_{n-1}^1$ способами.
- Если есть четыре горизонтальные доминошки, то на доску нужно положить две фигурки  и $(n - 4)$ фигурки  в некотором порядке. Это можно сделать $\frac{(n-2)!}{2! \cdot (n-4)!} = C_{n-2}^2$ способами.
- ...

В итоге получаем, что существует $1 + C_{n-1}^1 + C_{n-2}^2 + \dots$ (сумма берется по всем слагаемым, пока верхний индекс не превосходит нижний) способов замостить доску $2 \times n$ доминошками 1×2 .

Ответ. F_{n+1} способ или $1 + C_{n-1}^1 + C_{n-2}^2 + \dots$ способов.

Таким образом, мы доказали, что

$$C_n^0 + C_{n-1}^1 + C_{n-2}^2 + \dots = F_{n+1}$$

На самом деле, и это равенство можно было получить совсем формально. Давайте обозначим

$$S_n = C_n^0 + C_{n-1}^1 + C_{n-2}^2 + \dots,$$

и посмотрим какими будут значения S_n при маленьких n :

$$S_0 = C_0^0 = 1;$$

$$S_1 = C_1^0 = 1;$$

$$S_2 = C_2^0 + C_1^1 = 1 + 1 = 2;$$

$$S_3 = C_3^0 + C_2^1 = 1 + 2 = 3;$$

$$S_4 = C_4^0 + C_3^1 + C_2^2 = 1 + 3 + 1 = 5;$$

$$S_5 = C_5^0 + C_4^1 + C_3^2 = 1 + 4 + 3 = 8;$$

...

Действительно, похоже на числа Фибоначчи. Для того, чтобы доказать, что $S_n = F_{n+1}$ достаточно проверить, что $S_n = S_{n-2} + S_{n-1}$:

$$S_{n-2} = C_{n-2}^0 + C_{n-3}^1 + C_{n-4}^2 + C_{n-5}^3 + \dots +$$

$$S_{n-1} = C_{n-1}^0 + C_{n-2}^1 + C_{n-3}^2 + C_{n-4}^3 + C_{n-5}^4 + \dots +$$

Ho

$$C_{n-1}^0 = C_n^0;$$

$$C_{n-2}^0 + C_{n-2}^1 = C_{n-1}^1;$$

$$C_{n-3}^1 + C_{n-3}^2 = C_{n-2}^2;$$

$$C_{n-4}^2 + C_{n-4}^3 = C_{n-3}^3;$$

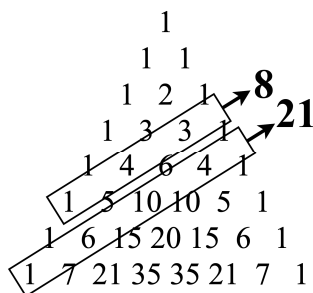
...

Поэтому

$$S_{n-2} + S_{n-1} = C_n^0 + C_{n-1}^1 + C_{n-2}^2 + C_{n-3}^3 + \dots = S_n.$$

То есть мы доказали, что $S_0 = S_1 = 1$, и каждая следующая сумма равна сумме двух предыдущих. Значит, это числа Фибоначчи.

На схеме ниже видно, как устроены эти суммы в треугольнике Паскаля — они образуются из чисел стоящих «по диагонали».



Здесь видно, как получается $F_6 = 8$ и $F_8 = 21$.

Задача 66. Докажите, что при всех целых $0 \leq k \leq n$ выполнено равенство

$$C_{n-1}^{k-1} + C_{n-2}^{k-1} + C_{n-3}^{k-1} + \dots + C_k^{k-1} + C_{k-1}^{k-1} = C_n^k.$$

Решение. Рассмотрим следующую задачу. Пусть у нас есть n человек, из которых мы хотим выбрать группу, состоящую из k человек. С одной стороны, существует C_n^k способов это сделать. Но давайте посчитаем количество способов иначе. Пронумеруем всех людей от 1 до n . Тогда

- существует C_{n-1}^{k-1} способ выбрать группу, в которой есть первый человек, так как к нему нужно добавить ещё $(k - 1)$ человека из оставшихся $(n - 1)$ человек;
- существует C_{n-2}^{k-1} способ выбрать группу, в которой нет первого, но есть второй человек, так как к нему нужно добавить ещё $(k - 1)$ человека из оставшихся $(n - 2)$ человек;
- существует C_{n-2}^{k-1} способ выбрать группу, в которой нет первого и второго, но есть третий человек;
- существует C_{n-3}^{k-1} способ выбрать группу, в которой нет первого, второго и третьего, но есть четвёртый человек;
- ...
- существует C_k^{k-1} способ выбрать группу, в которой нет первого, второго, третьего, ..., $(n - k - 1)$ -го, но есть $(n - k)$ -й человек;
- существует C_{k-1}^{k-1} способ выбрать группу, в которой нет первого, второго, третьего, ..., $(n - k)$ -го, но есть $(n - k + 1)$ -й человек.

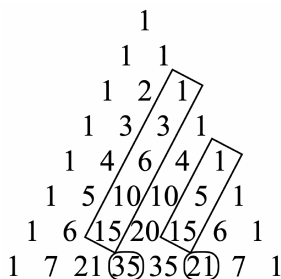
Других вариантов нет. Потому что если в группе нет первого, второго, третьего, ..., $(n - k + 1)$ -го чело-

века, то из оставшихся $(k - 1)$ человека уже нельзя выбрать группу, состоящую из k человек.

В итоге получаем, что

$$C_{n-1}^{k-1} + C_{n-2}^{k-1} + \dots + C_{k-1}^{k-1} = C_n^k$$

На схеме ниже видно, как выглядят эти суммы в треугольнике Паскаля.



Здесь показано, что

$$C_6^2 + C_5^2 + C_4^2 + C_3^2 + C_2^2 = 15 + 10 + 6 + 3 + 1 = 35 = C_7^3;$$

$$C_6^4 + C_5^4 + C_4^4 = 15 + 5 + 1 = 35 = C_7^5.$$

А теперь попробуйте решить самостоятельно следующие задачи.

Задача 67. Сколько существует способов из десяти человек выбрать группу, в которой будет нечётное число человек?

Задача 68. Во сколько раз сумма чисел, стоящих в 1001-й строке треугольника Паскаля

$$C_{1001}^0 + C_{1001}^1 + C_{1001}^2 + \dots + C_{1001}^{1001},$$

больше суммы чисел, стоящих в 1000-й строке

$$C_{1000}^0 + C_{1000}^1 + C_{1000}^2 + \dots + C_{1000}^{1000} ?$$

Задача 69. Докажите, что

$$\begin{aligned} & 1 - 3 \cdot C_{20}^1 + 9 \cdot C_{20}^2 - 27 \cdot C_{20}^3 + \dots + 3^{18} \cdot C_{20}^{18} - 3^{19} \cdot C_{20}^{19} + 3^{20} = \\ & = 1 - 5 \cdot C_{10}^1 + 25 \cdot C_{10}^2 - 125 \cdot C_{10}^3 + \dots + 5^8 \cdot C_{10}^8 - 5^9 \cdot C_{10}^{19} + 5^{10}. \end{aligned}$$

Задача 70. Докажите формулу

$$C_{n-1}^{k-1} + C_{n-2}^{k-1} + C_{n-3}^{k-1} + \dots + C_k^{k-1} + C_{k-1}^{k-1} = C_n^k$$

из задачи 66, несколько раз применив равенство

$$C_{n+1}^{k+1} = C_n^k + C_n^{k+1}.$$

Задача 71. Вычислите сумму

$$C_{1000}^0 - C_{999}^1 + C_{998}^2 - C_{997}^3 + \dots + C_{500}^{500}.$$

Опять про сумму степеней

Давайте немного отдохнём от чисел сочетаний и на примере последней формулы

$$C_{k-1}^{k-1} + C_k^{k-1} + C_{k+1}^{k-1} + \dots + C_{n-2}^{k-1} + C_{n-1}^{k-1} = C_n^k$$

покажем, как соотношения между числами сочетаний помогают доказывать некоторые, на первый взгляд не связанные с ними формулы.

Только давайте к этой формуле добавим слева и справа слагаемое C_n^{k-1} и заметим, что справа будет $C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k$:

$$C_{k-1}^{k-1} + C_k^{k-1} + \dots + C_{n-1}^{k-1} + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k$$

Посмотрим, во что превращается эта формула при конкретных значениях k . Например, при $k = 1$ получается совсем скучное равенство

$$\underbrace{1+1+1+\dots+1}_{(n+1) \text{ раз}} = n+1.$$

При $k = 2$ получаем

$$C_1^1 + C_2^1 + C_3^1 + \dots + C_{n-1}^1 + C_n^1 = C_{n+1}^2,$$

или

$$1+2+3+\dots+(n-1)+n = \frac{n \cdot (n+1)}{2!}.$$

Получили формулу для суммы первых n натуральных чисел

$$1+2+3+\dots+n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

При $k = 3$ получаем

$$C_2^2 + C_3^2 + C_4^2 + \dots + C_{n-1}^2 + C_n^2 = C_{n+1}^3,$$

или

$$\begin{aligned} \frac{1 \cdot 2}{2} + \frac{2 \cdot 3}{2} + \dots + \frac{(n-2) \cdot (n-1)}{2} + \frac{(n-1) \cdot n}{2} = \\ = \frac{(n-1) \cdot n \cdot (n+1)}{3!}. \end{aligned}$$

Если последнее равенство домножить на два, то получается симпатичный факт

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + (n-1) \cdot n = \frac{(n-1) \cdot n \cdot (n+1)}{3}$$

Благодаря этой формуле теперь вы можете мгновенно решить, например, следующую задачу.

Задача 72. Найдите значение выражения

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + 98 \cdot 99 + 99 \cdot 100.$$

Решение. Из только что доказанной формулы получаем, что

$$\begin{aligned} 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + 98 \cdot 99 + 99 \cdot 100 &= \\ &= \frac{99 \cdot 100 \cdot 101}{3} = 33 \cdot 100 \cdot 101 = 333\,300. \end{aligned}$$

Ответ. 333 300.

Но давайте вернёмся к доказанному равенству. Заметим, что

$$\begin{aligned} 1 \cdot 2 &= 2^2 - 2, & 2 \cdot 3 &= 3^2 - 3, & \dots, \\ (n-1) \cdot n &= n^2 - n. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + (n-1) \cdot n &= \\ &= (2^2 - 2) + (3^2 - 3) + \dots + (n^2 - n) = \\ &= (2^2 + 3^2 + \dots + n^2) - (2 + 3 + \dots + n) = \\ &= (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) - (1 + 2 + 3 + \dots + n). \end{aligned}$$

Но $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$. Поэтому

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 &= \\ &= (1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + (n-1) \cdot n) + \frac{n \cdot (n+1)}{2} = \\ &= \frac{(n-1) \cdot n \cdot (n+1)}{3} + \frac{n \cdot (n+1)}{2} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{2 \cdot (n-1) \cdot n \cdot (n+1) + 3 \cdot n \cdot (n+1)}{6} = \\
 &= \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2(n-1) + 3)}{6} = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}.
 \end{aligned}$$

И мы получили формулу для суммы первых n квадратов натуральных чисел

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}$$

Можно продолжить эти рассуждения. Если взять $k = 4$, то получим, что

$$C_3^3 + C_4^3 + C_5^3 + \dots + C_{n-1}^3 + C_n^3 = C_{n+1}^4,$$

или

$$\begin{aligned}
 &\frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{3!} + \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{3!} + \dots + \frac{(n-2) \cdot (n-1) \cdot n}{3!} = \\
 &= \frac{(n-2) \cdot (n-1) \cdot n \cdot (n+1)}{4!}.
 \end{aligned}$$

Домножим обе части равенства на $3!$:

$$\begin{aligned}
 &1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \dots + (n-2) \cdot (n-1) \cdot n = \\
 &= \frac{(n-2) \cdot (n-1) \cdot n \cdot (n+1)}{4}
 \end{aligned}$$

Каждое слагаемое в левой части имеет вид $(k-2) \cdot (k-1) \cdot k$, где k принимает значения от 3 до n . Давайте поймём, как устроены эти слагаемые:

$$\begin{aligned}
 (k-2) \cdot (k-1) \cdot k &= (k^2 - 3k + 2) \cdot k = \\
 &= k^3 - 3k^2 + 2k.
 \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} 1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \dots + (n-2) \cdot (n-1) \cdot n = \\ = (3^3 + 4^3 + \dots + n^3) - 3 \cdot (3^2 + 4^2 + \dots + n^2) + \\ + 2 \cdot (3 + 4 + \dots + n). \end{aligned}$$

Но

$$3 + 4 + \dots + n = \underbrace{(1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n)}_{S_1} - 3 = S_1 - 3,$$

$$3^2 + 4^2 + \dots + n^2 = \underbrace{(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + n^2)}_{S_2} - 5 = S_2 - 5,$$

$$3^3 + 4^3 + \dots + n^3 = \underbrace{(1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \dots + n^3)}_{S_3} - 9 = S_3 - 9.$$

А значит,

$$\begin{aligned} 1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \dots + (n-2) \cdot (n-1) \cdot n = \\ = (S_3 - 9) - 3(S_2 - 5) + 2(S_1 - 3) = \\ = S_3 - 3S_2 + 2S_1 - 9 + 15 - 6 = S_3 - 3S_2 + 2S_1. \end{aligned}$$

То есть

$$\frac{(n-2) \cdot (n-1) \cdot n \cdot (n+1)}{4} = S_3 - 3S_2 + 2S_1,$$

или

$$\begin{aligned} S_3 &= \frac{(n-2) \cdot (n-1) \cdot n \cdot (n+1)}{4} + 3S_2 - 2S_1 = \\ &= \frac{(n-2) \cdot (n-1) \cdot n \cdot (n+1)}{4} + \\ &+ 3 \cdot \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6} - 2 \cdot \frac{n \cdot (n+1)}{2} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{(n-2) \cdot (n-1) \cdot n \cdot (n+1) + 2 \cdot n \cdot (n+1) \cdot (2n+1) - 4 \cdot n \cdot (n+1)}{4} = \\
 &= \frac{((n-2) \cdot (n-1) + 2(2n+1) - 4) \cdot n \cdot (n+1)}{4} = \\
 &= \frac{(n^2 - 3n + 2 + 4n + 2 - 4) \cdot n \cdot (n+1)}{4} = \\
 &= \frac{(n^2 + n) \cdot n \cdot (n+1)}{4} = \frac{n \cdot (n+1) \cdot n \cdot (n+1)}{4} = \\
 &= \frac{n^2 \cdot (n+1)^2}{4}.
 \end{aligned}$$

И мы получили формулу для суммы первых n кубов натуральных чисел

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2 \cdot (n+1)^2}{4}$$

Пожалуй, на этом мы остановимся, но те, кому интересно, могут продолжить эти рассуждения, взяв $k = 4$, $k = 5$ и так далее и получить следующие интересные соотношения.

ГЛАВА 5 О ШАХМАТАХ, ШАРАХ И БУСАХ

В прошлых главах мы освоили основные комбинаторные идеи и факты, а теперь давайте порешаем красивые задачи. И начнём с задачи, которая не только имеет некоторый «практический смысл», но и иллюстрирует важность правильного выбора того, с чего начинать подсчет вариантов.

Шахматы Фишера

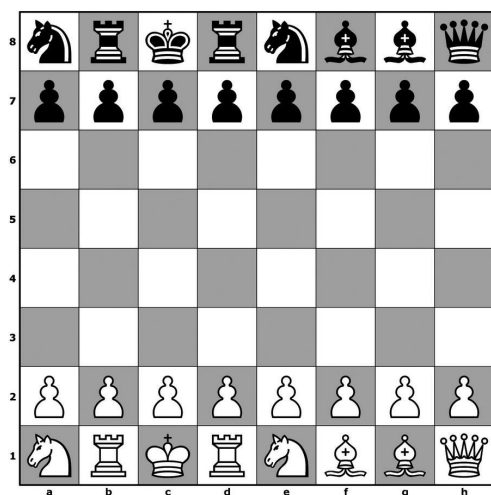
В этом разделе поговорим о шахматах, а точнее — об одной комбинаторной задаче, связанной с шахматами Фишера.



Пара слов для тех, кто не слышал про шахматы Фишера. Классические шахматы на определённом уровне становятся слишком профессиональными. Для того чтобы хорошо играть в шахматы, нужно выучить множество дебютов — то, как можно начинать партию. В итоге игроки заучивают огромный объём информации, и начало игры становится не совсем интересным, потому что первые несколько ходов соперников часто бывают предсказуемы. Поэтому Бобби Фишер, одиннадцатый чемпион мира по шахматам, предложил следующее: давайте расста-

новку фигур немного поменяем. Пешки оставим на месте, а остальные фигуры перемешаем. И у соперника точно так же перемешаем, чтобы позиции были симметричными.

Но абы как перемешивать нельзя, есть некоторые ограничения. Мы хотим, чтобы, во-первых, король стоял между ладьями. Это ограничивает положение короля, он не может, например, оказаться на крайней левой и крайней правой позиции. А во-вторых, слоны должны стоять на полях разного цвета, чтобы один слон ходил по белым полям, а другой — по чёрным. Других ограничений нет.



Некоторые любители шахмат знают, что шахматы Фишера называются ещё шахматами-960, потому что 960 — это количество различных первоначальных комбинаций, в которых могут стоять шахматные фигуры. То есть количество способов расставить восемь фигур в первом ряду так, чтобы выполнялись эти два

ограничения. Но откуда взялось число 960? Как его посчитать? Давайте разбираться.

Задача 73. Докажите, что существует 960 различных вариантов расставить в первом ряду шахматной доски две ладьи, два слона, два коня, короля и ферзя так, что король располагается между ладьями, а слоны стоят на полях разного цвета.

Можно начать с того, что из восьми полей выбрать три и поставить туда две ладьи и короля. После выбора трёх полей это делается однозначно, потому что король должен стоять между ладьями. Ну и количество способов это сделать понятно какое — C_8^3 . Потом в любом порядке расставляем коней. Далее нужно поставить слонов, и вот тут возникает сложность.

Мы же должны одного слона поставить на чёрное поле, а другого — на белое. Количество способов это сделать зависит от того, сколько осталось свободных белых и чёрных полей, но перед этим мы уже поставили на доску несколько фигур. То, сколько осталось свободных белых и чёрных полей, сильно зависит от того, как мы расставили предыдущие фигуры. Поэтому если так порассуждать, то становится понятно, что именно со слонов и нужно начинать расстановку фигур на доске.

Решение. Поставим двух слонов на первый ряд шахматной доски. Слоны должны стоять на полях разного цвета. Белых полей четыре, поэтому слона на белое поле можно поставить четырьмя разными спо-

собами. И куда бы мы ни поставили слона на белое поле, у нас есть четыре способа поставить второго слона на чёрное поле. Поэтому всего существует 4^2 способов расставить двух слонов.

Дальше можно рассуждать по-разному, но давайте ладей и короля оставим на потом. Начнём ставить коней. Нам нужно поставить два коня, а мест осталось шесть. То есть нам надо выбрать два поля из шести, куда поставить коней, и сделать это можно C_6^2 способами.

Теперь нужно поставить ферзя. Его можно поставить на любое из четырёх оставшихся полей, то есть существует четыре способа его поставить.

После этого осталось три поля, куда нужно расставить оставшиеся фигуры — это король и две ладьи. Но они встают однозначно: в среднее из трёх пустых полей нужно поставить короля, а в два других — ладьи.

Поэтому всего существует

$$4^2 \cdot C_6^2 \cdot 4 = 16 \cdot \frac{6 \cdot 5}{2} \cdot 4 = 16 \cdot 15 \cdot 4 = 960$$

способов расставить нужным образом фигуры на первом горизонтальном ряду шахматной доски. А это и нужно было доказать.

Когда мы понимаем, что существует 960 различных первоначальных расстановок фигур, становится понятно, почему эти шахматы привлекают всё больше людей. Потому что выучить все дебюты для каждой из этих 960 расстановок практически невозможно. Поэтому многим интереснее играть именно в такие шахматы. По крайней мере на начальном

этапе случайная расстановка выравнивает шансы у соперников, потому что каждый из них, скорее всего, видит такую расстановку в первый-второй раз в жизни и у него нет каких-то «домашних заготовок».

Шары и перегородки

В этом разделе обсудим несколько классических задач про раскладывание одинаковых объектов по разным ящикам.

Задача 74. Есть десять разных ящиков и тридцать одинаковых белых шаров. Сколько существует способов разложить эти шары по ящикам так, чтобы ни один ящик не был пустым?

Решение. Выложим все белые шары в ряд. Расставим между некоторыми из них девять чёрных шаров, они разделят белые шары на десять групп. Положим все белые шары, которые лежат до первого чёрного шара, в первый ящик; те, которые лежат между первым и вторым — во второй и так далее. Таким образом, количество способов раскладки белых шаров по ящикам равно количеству способов расположить в ряду белых шаров девять чёрных.

Чёрные шары можно расположить в любом из 29 мест (между первым и вторым, вторым и третьим, ..., 29-м и 30-м). Поэтому количество возможных расположений равно C_{29}^9 .

Ответ. C_{29}^9 способов.

Задача 75. Есть десять разных ящичков и тридцать одинаковых белых шаров. Сколько существует способов разложить эти шары по ящикам так, что некоторые ящики могут оказаться пустыми?

Первое решение. Давайте сведём задачу к предыдущей. Заметим, что каждому способу разложить 30 шаров по десяти ящикам так, что некоторые ящики могут оказаться пустыми, соответствует способ разложить 40 шаров по десяти ящикам так, чтобы ни один ящик не был пустым. Действительно, один способ переходит в другой добавлением в каждый из ящичков по шару.

Рассуждая так же, как в предыдущей задаче, получаем, что существует C_{39}^9 способов разложить 40 шаров по десяти ящикам так, чтобы ни один ящик не был пустым. Значит, и способов разложить 30 шаров по десяти ящикам так, что некоторые ящики могут оказаться пустыми, будет столько же.

Второе решение. Но можно рассуждать иначе. Рассмотрим ряд из 39 шаров — 30 белых и 9 чёрных, — расположенных в произвольном порядке. Каждый такой ряд однозначно соответствует некоторому способу раскладки шаров по ящикам: в первый ящик попадают все белые шары, которые лежат до первого чёрного шара; во второй — расположенные между первым чёрным и вторым и так далее. Если чёрный шар окажется в самом начале или самом конце или какие-то два чёрных шара стоят подряд, то соответствующий ящик будет пустым.

Поэтому количество способов раскладки шаров по ящикам равно количеству различных рядов из 39 шаров, 30 из которых белые, а девять — чёрные. То есть равно количеству способов из 39 мест выбрать девять, на которые мы положим чёрные шары — C_{39}^9 .

Ответ. C_{39}^9 способов.

Рассуждая аналогично двум предыдущим задачам, можно показать, что если у нас есть k разных ящиков и n одинаковых белых шаров, то существует C_{n-1}^{k-1} способов разложить эти шары по ящикам так, чтобы ни один ящик не был пустым, и C_{n+k-1}^{k-1} способов разложить эти шары по ящикам так, что некоторые ящики могут оказаться пустыми.

Задача 76. Дано m белых и n чёрных шаров, причём $n \leq m + 1$. Сколько существует способов выложить в ряд все шары так, чтобы никакие два чёрных шара не лежали рядом?

Решение. Выложим в ряд все белые шары. Есть $(m + 1)$ место, куда можно положить чёрные шары, — $(m - 1)$ место между белыми шарами и два места по краям ряда. Из этих $(m + 1)$ мест нам нужно выбрать любые n , в которые мы положим чёрные шары. Поэтому существует C_{m+1}^n способов выложить в ряд все шары так, чтобы никакие два чёрных шара не лежали рядом.

Ответ. C_{m+1}^n способов.

А теперь попробуйте решить несколько задач самостоятельно.

Задача 77. Ваня принёс в класс десять одинаковых конфет и решил разделить их между собой, Петей и Колей. Сколько существует способов это сделать, если у каждого из них должна быть хотя бы одна конфета?

Задача 78. Двадцать депутатов городского собрания выбирают председателя из пяти кандидатов. Каждый депутат голосует ровно за одного из них. После голосования составляется протокол, в котором указывается количество голосов за каждого кандидата. Сколько различных протоколов может получиться?

Задача 79. На полке стоит ряд из двадцати книг. Сколько существует способов выбрать из них девять так, чтобы никакие две из выбранных книг не стояли рядом?

Задача 80. Сколько существует способов выложить в ряд три красных, четыре синих и пять зелёных шаров так, чтобы никакие два синих шара не лежали рядом?

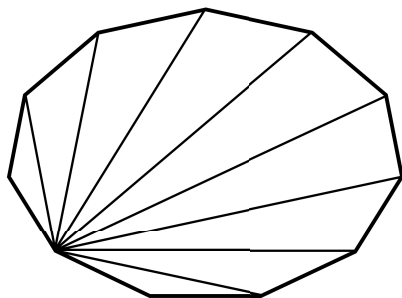
Задача 81. У нас есть по пять одинаковых шаров каждого из трёх цветов — белые, чёрные и красные. Сколько существует способов разложить эти 15 шаров по трём различным ящикам так, что некоторые ящики могут оказаться пустыми?

Комбинаторика в геометрии

Довольно часто встречаются комбинаторные задачи с геометрическими сюжетами. В таких задачах обычно, кроме знания комбинаторики, нужны некоторые знания из геометрии. В этом разделе рассмотрим именно такие задачи.

Задача 82. Сколько диагоналей у выпуклого n -угольника?

Первое решение. Выберем любую вершину. Из неё выходит $(n - 3)$ диагонали — во все вершины, кроме неё самой и двух соседних вершин.



Если мы просуммируем это количество по всем вершинам, то получим $n(n - 3)$. Осталось понять, что так как у диагонали два конца, то таким образом мы каждую диагональ посчитали дважды. Поэтому всего у выпуклого n -угольника $\frac{n(n - 3)}{2}$ диагоналей.

Второе решение. У выпуклого n -угольника всего n вершин. Значит, есть C_n^2 способа выбрать пару вер-

шин. Каждая пара вершин — это либо сторона, либо диагональ многоугольника. А сторон у него ровно n . Поэтому диагоналей

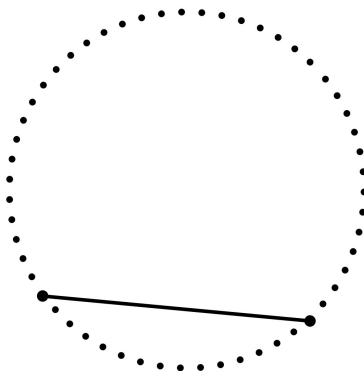
$$C_n^2 - n = \frac{n(n-1)}{2} - n = \frac{n(n-1)-2n}{2} = \frac{n(n-3)}{2}.$$

Ответ. $\frac{n(n-3)}{2}$ диагоналей.

Задача 83. У правильного 333-угольника отметили все его 333 вершины. Сколько существует равнобедренных треугольников с вершинами в отмеченных точках?



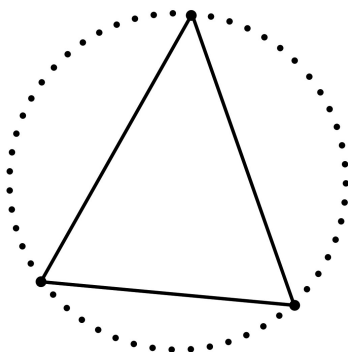
Решение. Выберем какую-нибудь пару отмеченных точек и соединим их отрезком.



Давайте поймём, сколько существует отмеченных точек, которые образуют равнобедренный треугольник с таким основанием. Всего у нас есть 333 отмеченные точки. Без двух выбранных остаётся 331 точка.

Но 331 — нечётное число, значит, с одной стороны от отрезка будет нечётное количество точек, а с другой — чётное.

Допустим, что «сверху» нечётное количество отмеченных точек. Тогда только средняя из них образует равнобедренный треугольник с таким основанием.



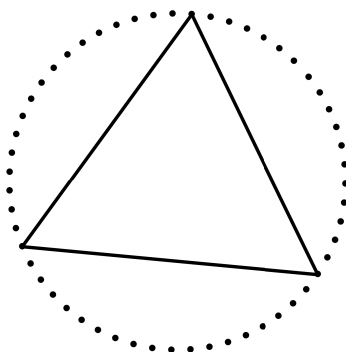
Но тогда «снизу» окажется чётное количество точек, а среди чётного количества точек нельзя выбрать среднюю. Поэтому «снизу» не найдётся ни одной отмеченной точки, которая бы образовывала равнобедренный треугольник с таким основанием.

Что же получилось? Мы установили, что для любой пары отмеченных точек существует ровно одна точка, которая вместе с этой парой образует равнобедренный треугольник, у которого основанием является отрезок с концами в этой паре точек.

Сколько же получается таких равнобедренных треугольников? Их ровно столько, сколько существует различных пар отмеченных точек. Но мы знаем,

что есть C_{333}^2 способа выбрать две точки из 333 отмеченных.

На первый взгляд может показаться, что это и есть ответ. Мы же посчитали все возможные равнобедренные треугольники с вершинами в отмеченных точках. Но это не совсем так. Давайте поймём, что мы посчитали. Мы нашли количество равнобедренных треугольников, у которых отрезок между некоторыми двумя отмеченными точками является основанием. Проблема в том, что иногда равнобедренный треугольник является ещё и равносторонним! А так как количество вершин у исходного 333-угольника кратно трём, то равносторонние треугольники в нём точно будут.



Какие есть проблемы с равносторонними треугольниками? Дело в том, что каждый такой треугольник мы учли несколько раз. Сначала мы его посчитали как равнобедренный треугольник с «нижним» основанием, потом — как равнобедренный треугольник с «правым» основанием, и наконец — как равнобедренный треугольник с «левым» основанием.

То есть каждый равносторонний треугольник мы посчитали три раза!

А это означает, что из того числа, которое мы получили, нужно вычесть удвоенное количество всех равносторонних треугольников — мы их посчитали три раза, а нужно было посчитать всего лишь один раз.

Давайте поймём, сколько существует равносторонних треугольников. Все 333 вершины разбиваются на $\frac{333}{3} = 111$ троек вершин, образующих равносторонний треугольник. Действительно, если мы пронумеруем все вершины, то вершины с номерами

$$\{1; 112; 223\}, \quad \{2; 113; 224\}, \quad \{3; 114; 225\}, \\ \dots, \quad \{111; 222; 333\}$$

образуют равносторонние треугольники.

В итоге получаем окончательный ответ

$$C_{333}^2 - 2 \cdot 111 = \frac{333 \cdot 332}{2} - 2 \cdot 111 = \\ = 111 \cdot (3 \cdot 166 - 2) = 111 \cdot 496 = 55\,056.$$

То есть мы сначала посчитали количество пар отмеченных точек, поняли, что для каждой пары существует ровно один равнобедренный треугольник, для которого отрезок с концами в этой паре является основанием. А дальше поняли, что если треугольник равнобедренный, но не равносторонний, то у него лишь одну сторону можно принять за основание равнобедренного треугольника, а если он равносторонний, то у него каждая из сторон является таким основанием. Поэтому каждый равносторонний

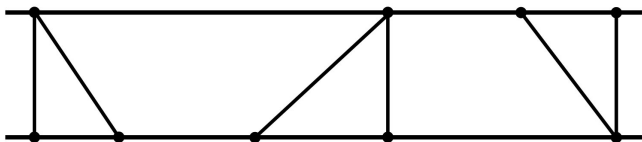
треугольник мы посчитали три раза вместо одного. Поэтому из общего числа, которое мы вычислили, нужно вычесть удвоенное количество равносторонних треугольников.

Ответ. 55 056 равнобедренных треугольников.

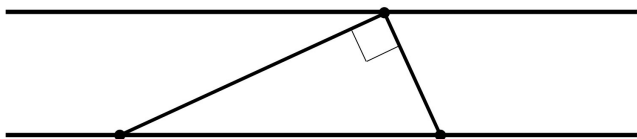
Задача 84. На координатной плоскости на каждой из прямых $y = 1$ и $y = 6$ отмечено по 200 точек с абсциссами 1, 2, 3, ..., 200. Сколько существует способов выбрать три точки из отмеченных 400 так, чтобы они являлись вершинами прямоугольного треугольника?



Решение. Прежде чем начать считать, давайте поймём, какие бывают варианты расположения прямоугольного треугольника. Главное — осознать, что, кроме очевидного варианта, когда один из катетов лежит на одной из прямых, а второй — перпендикулярен этим прямым:



есть ещё и другой вариант, когда гипотенуза лежит на одной из прямых:

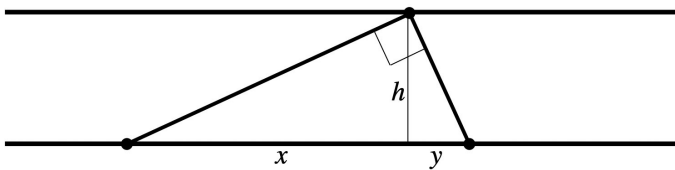


Для первого варианта посчитать проще. У нас есть 200 мест, куда можно поместить вертикальный катет. После этого осталось 398 точек, и любая из них подходит в качестве третьей вершины прямоугольного треугольника. То есть существует

$$200 \cdot 398 = 79\,600$$

способов нарисовать прямоугольный треугольник так, что один из катетов лежит на одной из прямых, а второй перпендикулярен этим прямым.

Давайте разберём другой вариант расположения треугольника. Нужно понять, какой длины должна быть гипотенуза. Для этого вспомним простой геометрический факт: $h^2 = xy$, где h — высота прямоугольного треугольника, проведённая из вершины прямого угла, а x и y — отрезки, на которые гипотенуза разбивается основанием этой высоты (если вы вдруг забыли, то этот факт следует из подобия двух прямоугольных треугольников, на которые высота разбивает исходный треугольник).

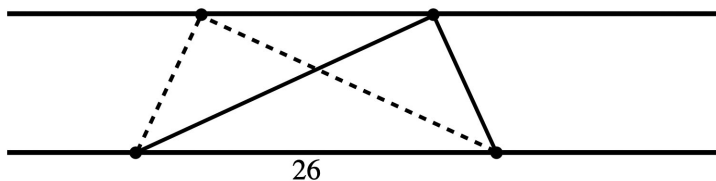


Мы знаем, что высота равна 5, то есть $xy = 5^2$, где x и y — натуральные числа. Легко понять, что есть только два случая: либо оба числа равны пяти, либо одно из них равно единице, а второе — 25.

В первом случае длина гипотенузы равна 10, а значит, есть 190 способов расположить её на каждой из

прямых (абсцисса левой вершины может быть любой от 1 до 190). То есть всего $2 \cdot 190 = 380$ вариантов расположить гипотенузу. Но, как только мы фиксировали расположение гипотенузы, мы однозначно определили весь треугольник — третья вершина должна быть на другой прямой, ровно посередине между концами гипотенузы.

Во втором случае длина гипотенузы равна 26, а значит, есть 174 способа расположить её на каждой из прямых (абсцисса левой вершины может быть любой от 1 до 174). То есть всего $2 \cdot 174 = 348$ вариантов расположить гипотенузу. Но теперь для каждого расположения гипотенузы есть два способа выбрать третью вершину:



Поэтому в этом случае будет $2 \cdot 348 = 696$ способов нарисовать прямоугольный треугольник.

Итого получаем

$$79\,600 + 380 + 696 = 80\,676$$

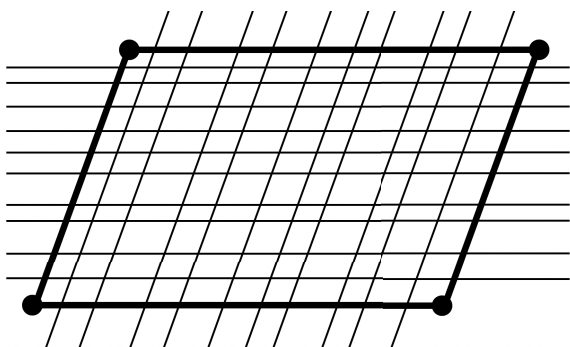
способов выбрать три точки так, чтобы они являлись вершинами прямоугольного треугольника.

Ответ. 80 676 прямоугольных треугольников.

Попробуйте самостоятельно справиться со следующими задачами.

Задача 85. На некоторой прямой произвольно отмечено 10 точек, а на параллельной ей прямой — 12 точек. Сколько существует треугольников и сколько существует четырёхугольников с вершинами в этих точках?

Задача 86. Параллелограмм пересекается двумя рядами по десять прямых, параллельных его сторонам.



Сколько различных параллелограммов можно выделить в образовавшейся сетке?

Задача 87. На сторонах треугольника ABC отметили точки, отличные от его вершин: 10 точек на стороне AB , 11 точек на стороне BC и 12 точек на стороне AC . Сколько существует треугольников с вершинами в отмеченных точках?

Задача 88. Сколько всего существует точек пересечения диагоналей у выпуклого десятиугольника, если известно, что никакие три диагонали не пересекаются в одной точке?

(Если какие-то две диагонали имеют общую вершину, то она не считается точкой их пересечения, то есть рассматриваются лишь внутренние точки пересечения диагоналей.)

Задача 89. Отметим все вершины выпуклого десятиугольника. Сколько существует незамкнутых несамопересекающихся восьмизвенных ломаных с вершинами в отмеченных точках?

Комбинаторика и теория чисел

В этом разделе обсудим несколько сюжетов, в которых тесно переплетены комбинаторные и теоретико-числовые идеи.

Начнем с серии очень простых задач на делимость.

Задача 90. Докажите, что произведение любых двух подряд идущих натуральных чисел делится на два.

Решение. Так как чётные и нечётные числа чередуются, то одно из наших чисел чётное, то есть делится на два. Тогда и произведение чисел делится на два.

Задача 91. Докажите, что произведение любых трёх подряд идущих натуральных чисел делится на шесть.

Решение. Среди трёх подряд идущих натуральных чисел есть число, которое делится на три, и есть число, которое делится на два. Поэтому их произведение делится на шесть.

Задача 92. Докажите, что произведение любых четырёх подряд идущих натуральных чисел делится на 24.

Решение. Во-первых, среди четырёх подряд идущих натуральных чисел есть два чётных числа, одно из которых делится на четыре. Поэтому произведение наших чисел делится на восемь. Во-вторых, среди четырёх подряд идущих натуральных чисел есть хотя бы одно число, которое делится на три. Поэтому произведение наших чисел делится на три. В итоге получаем, что произведение точно делится на $3 \cdot 8 = 24$.

Эти рассуждения можно продолжить и дальше и точно так же доказать, что

- произведение любых пяти подряд идущих натуральных чисел делится на 120;
- произведение любых шести подряд идущих натуральных чисел делится на 720;
- произведение любых семи подряд идущих натуральных чисел делится на 5040;
- ...

Но давайте лучше докажем все эти утверждения разом, решив следующую задачу.

Задача 93. Докажите, что произведение любых k подряд идущих натуральных чисел делится на $k!$.



Решение. Пусть большее из чисел равно n , тогда произведение наших чисел равно

$$n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot (n - k + 1).$$

Нам нужно доказать, что оно делится на $k!$. Другими словами, нам нужно показать, что число

$$\frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!}$$

является целым. Но мы знаем, что это просто C_n^k — количество способов из n объектов выбрать k . А количество способов — это точно целое число.

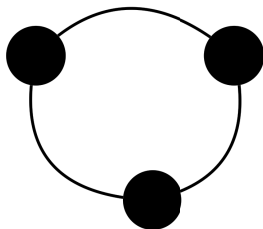
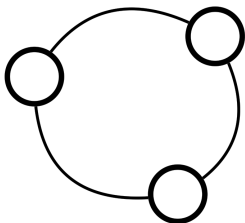
Вот так можно доказать, что одно число делится на другое просто потому, что их частное — это количество способов что-то сделать. А количество способов не может быть нецелым числом. И, на мой взгляд, это потрясающе красивый способ доказывать какие-то факты из теории чисел. Самый яркий пример такого приёма — следующая задача.

Задача 94. Сколько существует различных бус, состоящих из p бусинок одинакового размера (где p — простое), каждая из которых одного из n цветов?

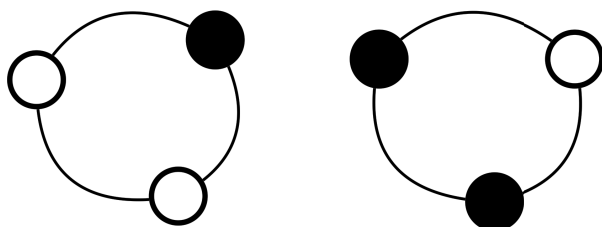


Если одни бусы переходят в другие при повороте, то это одни и те же бусы, но при этом считаем, что бусы лежат на столе, то есть переворачивать их нельзя.

Прежде чем решать в общем виде, давайте поймём, какой ответ при маленьких n и p . Например, при $n = 2$ и $p = 3$. Есть двое бус со всеми бусинками одного цвета:



и двое бус, у которых одна бусинка одного цвета, а две другие — другого:



Итого четверо бус.

Всегда полезно перед тем, как решать задачу в общем виде, понять, какой ответ получается в частном случае. Потому что, когда вы получите ответ в общем виде, вы сможете проверить, работает ли ваша формула на этом частном случае. И если не работает, значит, вы точно где-то что-то забыли учесть.

Решение. Давайте теперь попробуем решить в общем виде. Но сразу количество различных бус тяжело посчитать, потому что нужно как-то учесть, что бусы, переходящие друг в друга при повороте, — это одни и те же бусы. Поэтому давайте сначала посчитаем количество цепочек. Цепочка — это бусы, которые разрезали в каком-то месте, то есть это просто бусинки, выстроенные в ряд. У цепочки есть начало и конец:



Сколько различных цепочек можно сделать, если должно быть p бусинок, каждая из которых одного

из n цветов? Это совсем просто. Первая — любого цвета — n вариантов, вторая — любого цвета — n вариантов, и так далее. Всего получается n^p различных цепочек.

Теперь давайте поймём, как связано количество цепочек и количество бус. Каждые бусы можно разрезать в любом из n мест — между любыми двумя бусинками. Поэтому кажется, что количество цепочек должно быть в n раз больше, чем количество бус. Но это не совсем так, потому что есть бусы, которые разрезав в разных местах, можно получить одну и ту же цепочку. Например, если у бус все бусинки одного цвета, то где бы вы их ни разрезали, вы получите одну и ту же одноцветную цепочку.

Если бы число p не было простым, например если бы оно было чётным числом, то бусинки бы могли чередоваться, и, разрезав их в разных местах, можно было бы получить одну и ту же цепочку. Но когда p — простое число, то такая проблема есть лишь у одноцветных бус. Потому что, если при разрезании некоторых бус в разных местах получают одинаковые цепочки, значит, эти бусы переходят сами в себя при некотором повороте. Но тогда в этих бусах есть некоторая повторяющаяся последовательность бусинок. Значит, p делится на количество бусинок в этой повторяющейся последовательности. Но p — простое, поэтому делится только на единицу и на p . В первом случае получаем, что все бусинки одного цвета. А во втором — что эта «повторяющаяся последовательность бусинок» состоит из всех бусинок, то есть для того, чтобы совместить бусы сами с собой, нам пришлось сделать полный круг, а значит, нет двух

разных мест, разрезав в которых мы получаем одинаковые цепочки.

Давайте пока забудем про одноцветные бусы и цепочки, тогда бус будет ровно в p раз меньше, чем цепочек. Неодноцветных цепочек всего $(n^p - n)$, так как всех n^p цепочек только n цепочек одного цвета.

Значит, неодноцветных бус будет $\frac{n^p - n}{p}$. Но одноцветных бус тоже n штук. В итоге получаем, что существует

$$\left(\frac{n^p - n}{p} + n \right)$$

различных бус из p бусинок, каждая из которых одного из n цветов.

Ответ. $\left(\frac{n^p - n}{p} + n \right)$ бус.

На всякий случай можно подставить в ответ $n = 2$ и $p = 3$, чтобы убедиться, что получится ровно тот ответ для этого частного случая, который мы получили перед решением задачи:

$$\frac{n^p - n}{p} + n = \frac{2^3 - 2}{3} + 2 = \frac{6}{3} + 2 = 4.$$

Вот мы и решили задачу, но где же тут обещанная теория чисел? Смотрите. Мы доказали, что всего существует $\left(\frac{n^p - n}{p} + n \right)$ различных бус. Но количество бус — это целое число. Значит, и $\frac{n^p - n}{p}$ — это

целое число. Это означает, что $(n^p - n)$ делится на p . И мы с вами только что доказали Малую теорему Ферма!

Малая теорема Ферма. Пусть n — натуральное, а p — простое число. Тогда $(n^p - n)$ делится на p .

А это очень важное и не очень простое утверждение из теории чисел. Красиво, да? Мы просто решили не самую сложную комбинаторную задачу и случайно доказали важную теорему!

Давайте обсудим ещё один важный сюжет на стыке комбинаторики и теории чисел. Вспомним опять треугольник Паскаля. Если посмотреть на его пятую строку

$$1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1,$$

то можно заметить, что все элементы, кроме крайних, делятся на пять.

Если посмотреть на седьмую строку

$$1 \quad 7 \quad 21 \quad 35 \quad 35 \quad 21 \quad 7 \quad 1,$$

то можно заметить, что все элементы, кроме крайних, делятся на семь.

А, например, для шестой строки

$$1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1$$

такого эффекта нет.

Если посмотреть на другие строки треугольника Паскаля, то можно сделать предположение, что это работает для всех строк с простыми номерами. Давайте это докажем!

Задача 95. Докажите, что если p — простое число и $1 \leq k \leq p - 1$, то C_p^k делится на p .

Решение. Мы знаем, что $C_p^k = \frac{p!}{k! \cdot (n-k)!}$. Значит,

$$C_p^k \cdot k! \cdot (n-k)! = p!.$$

Правая часть делится на простое число p , а значит, и левая часть делится на p . Но ни $k!$, ни $(n-k)!$ на p не делятся (так как в каждом из них все множители меньше простого числа p). Значит, C_p^k делится на p .

Задача 96. Докажите, что если p — простое число, то

$$(a + b)^p - a^p - b^p$$

делится на p при любых натуральных a и b .

Первое решение. Воспользуемся формулой бинома Ньютона

$$(a + b)^p - a^p - b^p = C_p^1 a^{p-1} b + C_p^2 a^{p-2} b^2 + \dots + C_p^{n-1} a b^{p-1}.$$

Но в предыдущей задаче мы доказали, что каждый из биномиальных коэффициентов $C_p^1, C_p^2, \dots, C_p^{n-1}$ делится на p . Значит, и всё полученное выражение делится на p .

Второе решение. Воспользуемся Малой теоремой Ферма, которую мы доказали ранее, решая задачу 94 про бусы. Мы знаем, что

- $(a^p - a)$ делится на p ;
- $(b^p - b)$ делится на p ;
- $((a + b)^p - (a + b))$ делится на p .

Но тогда и

$$\begin{aligned} ((a+b)^p - (a+b)) - (a^p - a) - (b^p - b) &= \\ &= (a+b)^p - a^p - b^p \end{aligned}$$

делится на p .

А теперь решим несколько олимпиадных задач по комбинаторике с элементами теории чисел.

Задача 97. Сколько существует пар натуральных чисел, у которых наименьшее общее кратное равно 5000?

Решение. Поскольку $5000 = 2^3 \cdot 5^4$ и оно должно делиться на каждое из чисел пары, то разложение на простые множители каждого из наших чисел имеет вид $2^x \cdot 5^y$, где $0 \leq x \leq 3$, $0 \leq y \leq 4$. Для того чтобы наименьшее общее кратное таких чисел оказалось равно 5000, нужно, чтобы реализовалась одна из двух возможностей:

- одно из чисел равно 5000, а другое число — любой делитель числа 5000;
- ни одно из чисел не равно 5000, но в разложении одного из чисел должен присутствовать множитель 2^3 , а в разложении другого — множитель 5^4 .

В первом случае второе число может быть любым числом вида $2^x \cdot 5^y$, где $0 \leq x \leq 3$, $0 \leq y \leq 4$. То есть существует четыре варианта для x — 0, 1, 2 или 3; и пять вариантов для y — 0, 1, 2, 3 или 4. То есть всего существует $4 \cdot 5 = 20$ делителей числа 5000.

Во втором случае получаем, что наши числа равны $2^3 \cdot 5^m$ и $2^n \cdot 5^4$, где $0 \leq m \leq 3$, $0 \leq n \leq 2$, так как ни одно из них не равно 5000. Таким образом, есть четыре возможных значения первого числа, и независимо

от этого три возможных значения второго числа. То есть в этом случае имеется $4 \cdot 3 = 12$ возможных пар.

В итоге получаем, что существует $20 + 12 = 32$ пары натуральных чисел, у которых наименьшее общее кратное равно 5000.

Ответ. 32 пары.

Задача 98. Сколько решений в натуральных числах имеет уравнение

$$xyz = 200\,000?$$



Решение. Разложим 200 000 на простые множители:

$$200\,000 = 2 \cdot 100\,000 = 2 \cdot 10^5 = 2 \cdot (2 \cdot 5)^5 = 2^6 \cdot 5^5.$$

Это значит, что у x , y и z в разложении на простые множители не может быть ничего, кроме двоек и пятерок. То есть

$$x = 2^a \cdot 5^b, \quad y = 2^c \cdot 5^d, \quad z = 2^e \cdot 5^f,$$

где a, b, c, d, e и f — целые неотрицательные числа. При этом

$$a + c + e = 6, \quad b + d + f = 5,$$

потому что

$$xyz = 2^{a+c+e} \cdot 5^{b+d+f}.$$

Давайте поймём, сколько существует способов «раскидать» шестёрку на три слагаемых, каждое из которых целое неотрицательное число. Заметим, что это равносильно задаче 75 о количестве способов разложить шесть шаров по трём разным ящикам так, что некоторые ящики могут оказаться пустыми. Как

мы знаем, существует $C_8^2 = \frac{8 \cdot 7}{2} = 28$ способов это сделать.

Аналогично понимаем, что существует $C_7^2 = \frac{7 \cdot 6}{2} = 21$ способ «раскидать» пятёрку на три слагаемых, каждое из которых целое неотрицательное число.

Таким образом, мы получили, что есть 28 способов выбрать тройку чисел $(a; c; e)$. И для каждого из этих способов существует 21 вариант, как выбрать тройку $(b; d; f)$. А значит, существует всего $28 \cdot 21 = 588$ троек чисел $(x; y; z)$ таких, что $xyz = 200\,000$.

Ответ. 588 решений.

Задача 99. На столе лежат 130 различных карточек с числами 502, 504, 506, ..., 758, 760 (на каждой карточке написано ровно одно число, каждое число встречается ровно один раз). Сколько существует способов выбрать три карточки так, чтобы сумма чисел на выбранных карточках делилась на три?



Решение. Давайте разберёмся, от чего зависит, будет ли делиться сумма чисел на три или не будет. Если вы от каждого числа заберете часть, которая делится на три, то это никак не повлияет на делимость исходной суммы на три. То есть делимость на три зависит только от остатков при делении на три.

Так как 501 делится на три, то у 502 остаток равен 1, у 504 остаток равен 0, у 506 равен 2, ..., у 758 равен 2, а у 760 остаток равен 1. То есть, с точки зрения делимости на три, последовательность

502, 504, 506, 508, 510, 512, ... , 758, 760

можно заменить на

1, 0, 2, 1, 0, 2, 1, 0, 2, 1, 0, 2, ..., 2, 1.

Как мы видим, остатков не совсем поровну. Давайте посчитаем, сколько раз встречается каждый из остатков. Сгруппируем их по тройкам

$\underbrace{1, 0, 2}, \underbrace{1, 0, 2}, \underbrace{1, 0, 2}, \dots, \underbrace{1, 0, 2}, 1.$

Получилось несколько раз по $\{1, 0, 2\}$ и единица в конце. Значит, единиц будет на одну больше, чем нулей и двоек. Всего чисел 130, поэтому нулей и двоек

будет по $\frac{129}{3} = 43$, а единиц — 44.

Видите, в этой задаче нам нужны некоторые знания из теории чисел.

Во-первых, как мы уже поняли, на делимость суммы влияют только остатки слагаемых. Во-вторых, сейчас нам нужно понять, в каком случае сумма трёх чисел будет делиться на три. Очевидно, что существует две возможности:

- когда все остатки одинаковые: $\{0, 0, 0\}$, $\{1, 1, 1\}$, $\{2, 2, 2\}$ — в каждом из этих случаев сумма будет делиться на три;
- когда остатки не все одинаковые, они должны быть все различные, потому что если в любой из троек $\{0, 0, 0\}$, $\{1, 1, 1\}$, $\{2, 2, 2\}$ поменять лишь один остаток, то сумма не будет делиться на три.

То есть нам подходят только такие четыре варианта:

$\{0, 0, 0\}$, $\{1, 1, 1\}$, $\{2, 2, 2\}$, $\{0, 1, 2\}$.

Если последние рассуждения показались вам слишком сложными, то вы можете просто выписать все возможные тройки остатков:

- все одинаковые

$$\{0, 0, 0\}, \quad \{1, 1, 1\}, \quad \{2, 2, 2\};$$

- два одинаковых, а третий отличается

$$\begin{array}{ll} \{0, 0, 1\}, & \{0, 0, 2\}, \\ \{1, 1, 0\}, & \{1, 1, 2\}, \\ \{2, 2, 0\}, & \{2, 2, 1\}; \end{array}$$

- все разные

$$\{0, 1, 2\}.$$

И просто посмотрев, какой остаток будет у суммы каждой из троек, получить, что он будет равен нулю только для этих вариантов

$$\begin{array}{ll} \{0, 0, 0\}, & \{1, 1, 1\}, \\ \{2, 2, 2\}, & \{0, 1, 2\}. \end{array}$$

Теперь давайте считать. Сколько будет троек вида $\{0, 0, 0\}$? Это количество способов из 43 чисел с нулевым остатком выбрать какие-то три. То есть C_{43}^3 . Столько же будет троек вида $\{2, 2, 2\}$. Потому что у нас 43 числа с остатком 2. А троек вида $\{1, 1, 1\}$ будет C_{44}^3 , потому что единичек на одну больше, чем нулей и двоек.

С количеством троек вида $\{0, 1, 2\}$ всё ещё проще: есть 43 способа выбрать 0, 44 способа выбрать 1 и 43 способа выбрать 2. Поэтому таких троек будет $43 \cdot 44 \cdot 43$ штуки.

В итоге получается, что общее количество способов равно

$$\begin{aligned}
 & 2 \cdot C_{43}^3 + C_{44}^3 + 43 \cdot 44 \cdot 43 = \\
 & = 2 \cdot \frac{43 \cdot 42 \cdot 41}{3!} + \frac{44 \cdot 43 \cdot 42}{3!} + 43 \cdot 44 \cdot 43 = \\
 & = 43 \cdot \left(2 \cdot \frac{42 \cdot 41}{6} + \frac{44 \cdot 42}{6} + 44 \cdot 43 \right) = \\
 & = 43 \cdot (2 \cdot 7 \cdot 41 + 44 \cdot 7 + 44 \cdot 43) = \\
 & = 43 \cdot (14 \cdot 41 + 44 \cdot 50) = \\
 & = 43 \cdot (574 + 2200) = 43 \cdot 2774 = 119\,282.
 \end{aligned}$$

Ответ. 119 282 способа.

Со следующими задачами попробуйте справиться самостоятельно.

Задача 100. Сколько существует шестизначных чисел, делящихся на пять?

Задача 101. Число называют *палиндромом*, если его цифры расположены симметрично. Например, числа 343 и 56 465 являются палиндромами. Сколько существует пятизначных чисел-палиндромов, делящихся на 15?

Задача 102. Сколько различных натуральных делителей у числа 10 800?

Задача 103. Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 16 875.



Считай ненужное

Бывают такие задачи, в которых нужно найти количество каких-то объектов, и совсем непонятно, как напрямую это количество посчитать. И тогда часто выручает приём «считай ненужное» — возможно, окажется, что посчитать всё остальное будет проще, чем то, что нужно. Следующие несколько задач иллюстрируют этот приём на практике.

Задача 104. Игральный кубик бросили четыре раза. Сколько существует различных последовательностей результатов бросков, в которых хотя бы один раз встретилась шестёрка?

Решение. Всего существует $6^4 = 1296$ различных последовательностей результатов четырёх бросков. Из них нам не подходят те, где ни разу не выпала шестёрка. А таких последовательностей бросков будет $5^4 = 625$ штук. Значит, существует $1296 - 625 = 674$ различные последовательности результатов четырёх бросков, в которых хотя бы один раз встретилась шестёрка.

Ответ. 674 последовательности.

Задача 105. Сколько существует способов из десяти профессоров и двадцати доцентов составить комиссию из пятнадцати человек, если в ней должен быть хотя бы один профессор?

Решение. Можно, конечно, просто перебрать десять случаев — когда профессор ровно один, когда

их два, ..., когда их десять. Но проще посчитать, сколько существует способов выбрать любых 15 человек из 30 — C_{30}^{15} , и вычесть количество способов выбрать 15 человек так, что среди них нет ни одного профессора — C_{20}^{15} . И сразу получаем ответ: $C_{30}^{15} - C_{20}^{15}$.

Ответ. $C_{30}^{15} - C_{20}^{15}$ способов.

Задача 106. Сколько существует десятизначных чисел, в которых хотя бы две какие-то цифры одинаковы?

Решение. Давайте вместо того, чтобы считать количество интересующих нас десятизначных чисел, посчитаем все остальные, что в этой задаче сделать гораздо проще! Действительно, остальные числа — это те десятизначные числа, в которых ни одна цифра не повторяется дважды, а так как цифр всего десять, значит, что это такие числа, в которые каждая цифра входит ровно один раз. Давайте посчитаем, сколько же их будет.

На первом месте может стоять любая цифра, кроме нуля, — девять вариантов. После того, как мы выбрали, какую цифру поставить на первое место, останется ещё девять цифр и девять мест, куда их можно поставить в любом порядке, то есть всего $9!$ способов. А значит, всего десятизначных чисел, у которых все цифры различны, $9 \cdot 9!$ штук.

Теперь, для того чтобы посчитать количество требуемых в задаче чисел, надо из общего количества десятизначных чисел вычесть не подходящие нам числа.

Всего существует $9 \cdot 10^9$ десятизначных чисел. Это можно понять и комбинаторно — на первом месте может стоять любая цифра, кроме нуля, — девять вариантов. А на оставшихся девяти местах — любая из десяти цифр. Но можно это посчитать и из совсем простых соображений. Десятизначные числа — это все числа от 1 000 000 000 до 9 999 999 999. То есть это все числа от 1 до 9 999 999 999, кроме чисел от 1 до 999 999 999. Значит, их всего

$$9\,999\,999\,999 - 999\,999\,999 = 9\,000\,000\,000$$

штук.

В итоге получаем, что всего существует

$$9 \cdot 10^9 - 9 \cdot 9! = 9 \cdot (10^9 - 9!)$$

десятизначных чисел, в которых хотя бы две какие-то цифры одинаковы.

Ответ. $9 \cdot (10^9 - 9!)$ чисел.

А теперь самостоятельно решите следующие задачи на ту же идею.

Задача 107. В алфавите некоторого языка пять букв. А словом является любая последовательность из пяти букв, в которой есть хотя бы две одинаковые буквы. Сколько существует слов в этом языке?

Задача 108. Сколько существует четырёхзначных чисел, в записи которых содержится хотя бы одна цифра 0?

Задача 109. Сколько существует пятизначных чисел, в записи которых содержится хотя бы одна чётная цифра?

Задача 110. Автобусный билет может иметь любой номер от 000000 до 999999. Назовем его номер *счастливым*, если разность каких-нибудь двух соседних цифр его номера равна пяти. Сколько существует счастливых номеров билетов?

Оценка плюс пример

Задача 111. Каждый киндер-сюрприз содержит ровно три различных гномика, а всего есть 12 разновидностей гномиков. В коробке лежит достаточно много киндер-сюрпризов, причём в любых двух из них тройки гномиков не одинаковы. Какое наименьшее количество киндер-сюрпризов нужно купить, чтобы после вскрытия в них заведомо оказалось хотя бы по одному гномику из 12 разновидностей?



Прежде чем начать решать задачу, давайте поймём, чего от нас хотят. Что значит «наименьшее количество чтобы заведомо оказалось»? Это означает следующее. Представьте, что ответ, например, 20. Тогда нам нужно, во-первых, доказать, что 20 киндер-сюрпризов всегда содержат 12 различных гномиков, а во-вторых, привести пример для 19 киндер-сюрпризов, которые не содержат все 12 различных гномиков. То есть задача, по сути, состоит из двух частей: нужно доказать «оценку», что если киндер-сюрпризов не меньше 20, то точно хватит, и привести «пример», показывающий, что 19 может не хватить. Поэтому говорят, что такие задачи на «оценку плюс пример».

А теперь давайте перейдём к решению.

Решение. Можно начать с разбора ситуации, когда «плохо», то есть понять, какого количества киндер-сюрпризов нам точно не хватит. Что это за ситуация? Это когда мы купили много киндер-сюрпризов, открыли их все, но там присутствует не более 11 разновидностей гномиков. Давайте посчитаем, сколько может быть киндер-сюрпризов, что в каждом из них разный набор, но при этом всего 11 гномиков.

Сколько всего существует различных наборов из трёх гномиков, если мы выбираем лишь из 11 разновидностей? Таких наборов

$$C_{11}^3 = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9}{6} = 165.$$

Это означает, что если найдено не более 11 различных гномиков, то киндер-сюрпризов не может быть больше, чем 165. А значит, ответ — 166.

Ответ. 166 киндер-сюрпризов.

Давайте ещё раз поймём, почему 166 является ответом. Мы доказали, что если мы откроем 165 киндер-сюрпризов, то может так оказаться, что там всего одиннадцать разных гномиков. Потому что существует 165 способов выбрать три гномика из 11. То есть существует 165 различных киндер-сюрпризов, в которых присутствуют лишь 11 разных гномиков. И может так оказаться, что купив 165 киндер-сюрпризов, нам попадутся именно они. Но если мы откроем 166 киндер-сюрпризов, то точно найдём не менее 12 различных гномиков, потому что, используя лишь 11 различных гномиков, больше, чем 165 разных троек, получить невозможно.

А теперь попробуйте самостоятельно решить следующие задачи на «оценку плюс пример».

Задача 112. В мешке лежит 100 шаров, которые отличаются только цветом: 10 красных, 20 синих, 30 жёлтых и 40 зелёных. Какое наименьшее количество шаров нужно вынуть из мешка, не заглядывая в него, чтобы среди них обязательно было не менее 25 шаров одного цвета?

Задача 113. В ячейках таблицы 20×15 расставлены числа 1, 2, ..., 300 в порядке возрастания: в первой строке слева направо от 1 до 20, во второй — от 21 до 40 и так далее.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
101	102	103	104	105	106	107	108	109	110	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120
121	122	123	124	125	126	127	128	129	130	131	132	133	134	135	136	137	138	139	140
141	142	143	144	145	146	147	148	149	150	151	152	153	154	155	156	157	158	159	160
161	162	163	164	165	166	167	168	169	170	171	172	173	174	175	176	177	178	179	180
181	182	183	184	185	186	187	188	189	190	191	192	193	194	195	196	197	198	199	200
201	202	203	204	205	206	207	208	209	210	211	212	213	214	215	216	217	218	219	220
221	222	223	224	225	226	227	228	229	230	231	232	233	234	235	236	237	238	239	240
241	242	243	244	245	246	247	248	249	250	251	252	253	254	255	256	257	258	259	260
261	262	263	264	265	266	267	268	269	270	271	272	273	274	275	276	277	278	279	280
281	282	283	284	285	286	287	288	289	290	291	292	293	294	295	296	297	298	299	300

Фишка начала движение из клетки 1 и, переходя в соседние по стороне клетки, в конце концов попала в клетку 300. Чему равна наименьшая возможная сумма чисел в клетках, в которых побывала фишка?

Задача 114. На экзамене по английскому языку восьми школьникам был предложен тест, состоящий из нескольких вопросов. Известно, что любые пять школьников ответили вместе на все вопросы (то есть на каждый вопрос хотя бы один из них дал правильный ответ), а любые четыре — нет. При каком минимальном количестве вопросов такое могло произойти?

Задача 115. В социальной сети Druzhby.net зарегистрировались 2000 пользователей. Каждый из них отправил запрос на дружбу 1000 других зарегистрированных. Два человека объявляются друзьями, если оба отправили запросы друг другу. Какое наименьшее количество пар друзей могло образоваться?

Числа Фибоначчи

Мы уже говорили немного про числа Фибоначчи в главе 4 и даже доказали в задаче 65 связь между ними и числами сочетаний. А в этом разделе посмотрим некоторые задачи, решение которых сводится к числам Фибоначчи.

Задача 116. Сколько существует десятибуквенных слов, которые состоят только из букв А и Б и не содержат двух букв Б подряд?

Решение. Обозначим через x_n количество n -буквенных слов, состоящих только из букв А и Б и не содержащих двух букв Б подряд. Тогда

$$\begin{aligned}
 x_1 &= 2 : && \text{А, Б,} \\
 x_2 &= 3 : && \text{АА, АБ, БА,} \\
 x_3 &= 5 : && \text{ААА, ААБ, АБА, БАА, БАБ,} \\
 &&& \dots
 \end{aligned}$$

Давайте поймём, как связаны между собой элементы этой последовательности. Каждое n -буквенное слово начинается либо с буквы А, либо с буквы Б. Если оно начинается с буквы А, то далее можно написать любое $(n - 1)$ -буквенное слово, состоящее только из букв А и Б и не содержащее двух букв Б подряд. Если же оно начинается с буквы Б, то вторая буква должна быть А (потому что две буквы Б подряд идти не могут), а после этой буквы А можно уже написать любое $(n - 2)$ -буквенное слово, состоящее только из букв А и Б и не содержащее двух букв Б подряд.

Таким образом мы доказали, что $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$. Поэтому

$$\begin{aligned}
 x_4 &= x_3 + x_2 = 5 + 3 = 8; \\
 x_5 &= x_4 + x_3 = 8 + 5 = 13; \\
 x_6 &= x_5 + x_4 = 13 + 8 = 21; \\
 x_7 &= x_6 + x_5 = 21 + 13 = 34; \\
 x_8 &= x_7 + x_6 = 34 + 21 = 55; \\
 x_9 &= x_8 + x_7 = 55 + 34 = 89; \\
 x_{10} &= x_9 + x_8 = 89 + 55 = 144.
 \end{aligned}$$

Значит, существует 144 десятибуквенных слова, состоящих только из букв А и Б и не содержащих двух букв Б подряд.

Ответ. 144 слова.

Легко заметить, что последовательность из предыдущей задачи состоит из чисел Фибоначчи:

$$x_1 = F_3, \quad x_2 = F_4, \quad \dots, \quad x_n = F_{n+2}, \quad \dots$$

А значит, пока мы решали предыдущую задачу, мы доказали более общий факт.

Задача 117. Докажите, что количество n -буквенных слов, состоящих только из букв А и Б и не содержащих двух букв Б подряд, равно F_{n+2} .

Решение. В предыдущей задаче мы показали, что количество таких слов равно x_n , и при этом мы знаем, что $x_n = F_{n+2}$.

Задача 118. На первой клетке длинной ленты, состоящей из клеток, сидит кузнечик. Раз в минуту кузнечик прыгает либо на соседнюю клетку справа, либо на клетку, находящуюся справа через одну. Сколькими способами кузнечик может добраться до n -й клетки ленты?

Решение. Обозначим искомую величину через a_n . Давайте поймём, чему равно a_n при маленьких n .

Если $n = 1$, то нам нужно добраться до первой клетки, в которой мы и так изначально стоим, то есть $a_1 = 1$.

Если $n = 2$, то нам нужно добраться до второй клетки. Это можно сделать, только если мы в первую минуту прыгнем на соседнюю клетку, то есть $a_2 = 1$.

Если $n = 3$, то нам нужно добраться до третьей клетки. Это можно сделать либо сразу прыгнув через одну, либо сделав два прыжка на соседние клетки, то есть $a_3 = 2$.

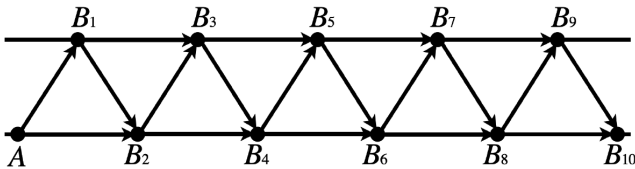
Если $n = 4$, то нам нужно добраться до четвёртой клетки. Давайте поймём, где мы могли быть перед последним прыжком: либо мы были на третьей клетке и прыгнули на соседнюю, либо были на второй и прыгнули через одну. Поэтому $a_4 = a_3 + a_2 = 2 + 1 = 3$.

Аналогично рассуждая, мы понимаем, что в n -ю клетку кузнечик может попасть за один прыжок либо из $(n - 1)$ -й клетки, либо из $(n - 2)$ -й. Поэтому $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$. Учитывая то, что $a_1 = a_2 = 1$, получаем, что $a_n = F_n$.

Ответ. F_n способов.

А теперь попробуйте самостоятельно решить такую задачу.

Задача 119. Сколько существует способов, двигаясь по стрелкам, добраться из точки A в точку B_{10} ?



А теперь порешайте сами

Вот мы и подошли к концу. К этому моменту мы обсудили множество комбинаторных идей и методов и отрешали более сотни задач. Теперь стоит проверить, насколько хорошо у вас получается решать задачи.

В этом разделе собраны задачи для самостоятельного решения. Я постарался отсортировать их для вас от простых к сложным, но не всегда то, что

кажется простым мне, окажется просто и для вас. Поэтому не расстраивайтесь, если какие-то задачи у вас не получится быстро решить.

Задача 120. Как известно, в современных автомобильных номерах России разрешено использовать лишь 12 букв, которые имеют аналоги в латинском алфавите, — А, В, Е, К, М, Н, О, Р, С, Т, У и Х. Сколько различных автомобильных номеров потенциально возможно в каждом регионе, если номер должен состоять из трёх букв и трёх цифр: сначала идёт буква, затем три цифры, а затем ещё две буквы?

A 1 2 3 B C

Задача 121. На конференции собрались 50 учёных. Каждый пожал руку ровно пяти коллегам. Сколько всего рукопожатий случилось на конференции между учёными?

Задача 122. На глобусе проведены 17 параллелей и 36 меридианов. На сколько частей они разделяют поверхность глобуса?

Задача 123. Сколько существует различных треугольников с целыми сторонами, периметр которых равен 20?

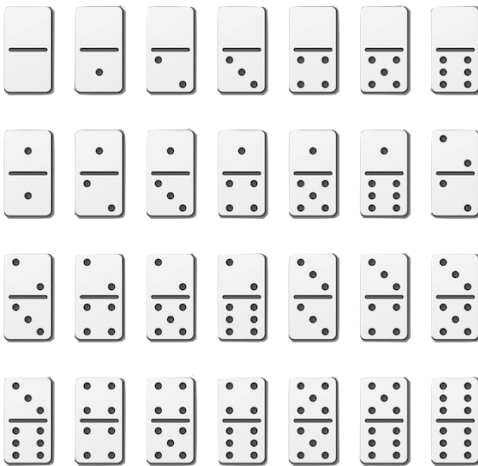
Задача 124. Найдите количество прямоугольников со сторонами, параллельными осям координат, таких, что точка (20; 30) содержится внутри (но не на границе) каждого из них, а абсциссы и ординаты

вершин являются натуральными числами, не превосходящими 50.

Задача 125. У Васи есть шесть книг по математике, а у Вани — девять. Все 15 книг — разные. Сколько существует способов для Васи и Вани обменяться друг с другом тремя книгами?

Задача 126. В семье двое взрослых и четверо детей. Сколько существует способов выбрать из них четверых людей для похода, если нужно, чтобы среди них был хотя бы один взрослый?

Задача 127. В стандартном домино на половинках доминошек бывает от нуля до шести точек, и всего в комплекте 28 разных доминошек:



Сколько доминошек будет в комплекте, где на половинке возможно от нуля до ста точек?

Задача 128. Сколько существует способов составить комиссию из девяти человек, выбирая её членов из десяти супружеских пар так, чтобы члены одной семьи не могли вместе оказаться в комиссии?

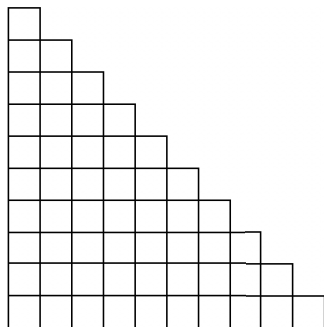
Задача 129. В группе детского сада пять мальчиков и шесть девочек. Сколько существует способов им выстроиться в очередь в столовую так, чтобы никакие два мальчика и никакие две девочки не стояли рядом?

Задача 130. Сколько существует натуральных чисел от 1 до 1000, десятичная запись которых не содержит двух одинаковых цифр, стоящих рядом?

Задача 131. Ладья стоит на левом поле клетчатой полоски 1×10 . За ход ей можно сдвинуться на любое количество клеток вправо. Сколько для неё существует способов добраться до крайнего правого поля?

Задача 132. В баскетбольную секцию ходят десять школьников. Сколько существует способов разбить их на две команды по пять человек?

Задача 133. Сколько существует способов разрезать клетчатую лесенку высотой 10 клеток



на 10 прямоугольников с размерами 1×1 , 1×2 , 1×3 , ..., 1×10 ?

Задача 134. У мальчика пять друзей. Каждый день в течение семи дней недели он приглашает к себе в гости для игры в новую настольную игру каких-то троих из них так, чтобы компания за неделю ни разу не повторялась. Сколько у него существует способов это сделать?

Задача 135. Чему равна сумма всех пятизначных чисел, которые можно получить всевозможными перестановками цифр 1, 2, 3, 4, 5?

Задача 136. По горизонтальному жёлобу в одном направлении на одинаковом расстоянии друг от друга катятся пять одинаковых шаров. Навстречу им катятся ещё семь таких же шаров на том же расстоянии друг от друга. Скорости всех шаров одинаковы. При столкновении двух шаров они разлетаются в противоположные стороны с теми же скоростями. Сколько всего столкновений произойдёт между этими шарами?

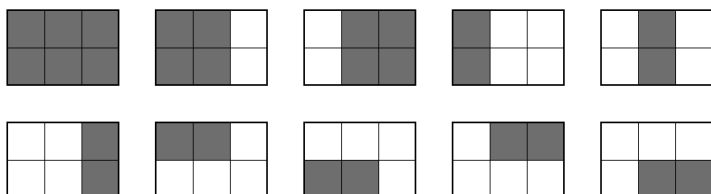
Задача 137. Сколько существует способов представить число 1000 в виде суммы трёх натуральных слагаемых? Два представления, отличающиеся порядком слагаемых, считаются различными.

Задача 138. Сколько существует способов расселить десять студентов по четырём комнатам: одноместной, двухместной, трёхместной и четырёхместной?

Задача 139. Сколько существует десятизначных чисел, сумма цифр которых равна четырём?

Задача 140. Прямоугольный параллелепипед $10 \times 20 \times 30$ разбит на единичные кубики. Сколько теперь можно выделить в нём прямоугольных параллелепипедов?

Задача 141. В клетчатом прямоугольнике 2×3 можно выделить десять прямоугольников, состоящих из чётного количества клеток.



А какое количество прямоугольников, содержащих чётное количество клеток, можно выделить в клетчатом прямоугольнике 4×9 ?

Задача 142. Сколько существует различных вариантов раскраски граней кубика в данные шесть цветов (по одной грани каждого цвета), если считать раскраски, отличающиеся лишь поворотом кубика, за один и тот же вариант?

Задача 143. Каких десятизначных чисел больше: не делящихся на 5 или тех, у которых ни первая, ни вторая цифра слева не являются пятёрками?

Задача 144. Куб $5 \times 5 \times 5$ состоит из 125 единичных кубиков. В центре одного из угловых кубиков сидит кузнечик. Каждую минуту он прыгает в центр соседнего по грани кубика так, чтобы расстояние до стартовой точки увеличивалось. Сколько существует

различных маршрутов, по которым кузнечик может допрыгать до кубика, противоположного исходному?

Задача 145. Сколько существует семизначных чисел, в десятичной записи которых могут встретиться только цифры 1, 2, 3 и 4, таких, что в них каждая следующая цифра не меньше предыдущей?

Задача 146. Сколько существует способов закрыть четыре вакансии на четыре разные должности при условии, что нужно выбрать двух мужчин и двух женщин, если есть десять кандидатов, которые подходят на все позиции, — четыре женщины и шестеро мужчин?

Задача 147. Сколько существует способов заполнить таблицу 4×4 нулями и единицами так, чтобы сумма чисел в каждой строке и каждом столбце была чётной?

Задача 148. Сколько существует различных способов раскрасить все стороны правильного пятиугольника, каждую в один из восьми данных цветов, если раскраски, которые переходят друг в друга при повороте, считаются одинаковыми?

Задача 149. Кузнечик прыгает по вершинам правильного треугольника, прыгая каждый раз в одну из соседних вершин. Сколько существует способов ему а) за десять прыжков; б) за тысячу прыжков вернуться в вершину, из которой он начал?

Задача 150. Паучок сидит на клетчатой бумаге и хочет проползти по линиям сетки путь длины 10, закончив его в той же точке, из которой он начал. Сколько существует способов ему это сделать?

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

4. Ответ. 6.

Давайте перечислим все возможные последовательности:

конфета → пряник → булочка
конфета → булочка → пряник
пряник → булочка → конфета
пряник → конфета → булочка
булочка → конфета → пряник
булочка → пряник → конфета

Значит, всего существует шесть различных последовательностей поедания сладостей.

5. Ответ. 8.

После трёх бросков могут получиться такие последовательности:

орёл → орёл → орёл
орёл → орёл → решка
орёл → решка → орёл
орёл → решка → решка
решка → орёл → орёл

решка \rightarrow орёл \rightarrow решка
решка \rightarrow решка \rightarrow орёл
решка \rightarrow решка \rightarrow решка

Получили восемь различных последовательностей.

6. Ответ. 36.

Пронумеруем всех участников турнира. Теннисист #1 должен сыграть с каждым из теннисистов #2, #3, #4, #5, #6, #7 и #8 — семь игр.

Теннисист #2 должен сыграть с каждым из теннисистов #1, #3, #4, #5, #6, #7 и #8, но игру между теннисистами #2 и #1 мы уже посчитали, поэтому здесь только шесть новых игр.

У теннисиста #3 новые игры будут с каждым из теннисистов #4, #5, #6, #7 и #8 — пять игр.

У теннисиста #4 новые игры будут с #5, #6, #7 и #8 — четыре игры.

У #5 — с #6, #7 и #8 — три игры.

У #6 — с #7 и #8 — две игры.

У #7 — только с #8 — одна игра.

А для теннисиста #8 все игры мы уже посчитали.

В итоге получаем, что за время турнира будет проведено

$$7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 36$$

игр.

7. Ответ. 10.

Если Иван позвал Аню и Борю, то в качестве третьего гостя может быть каждый из трёх остав-

шихся друзей — Вася, Гоша и Даша. То есть в этом случае есть три способа выбрать трёх друзей:

Аня, Боря, Вася;
Аня, Боря, Гоша;
Аня, Боря, Даша.

Если Иван позвал Аню, но не позвал Борю, то у него есть три способа выбрать двух друзей из трёх оставшихся:

Аня, Вася, Гоша;
Аня, Вася, Даша;
Аня, Гоша, Даша.

Если Иван не позвал Аню, но позвал Борю, то у него опять есть три способа выбрать двух друзей из трёх оставшихся:

Боря, Вася, Гоша;
Боря, Вася, Даша;
Боря, Гоша, Даша.

Если Иван не позвал ни Аню, ни Борю, то у него есть лишь один способ позвать трёх друзей — пригласить всех остальных:

Вася, Гоша, Даша.

Поэтому существует $3 + 3 + 3 + 1 = 10$ различных способов выбрать трёх друзей из пяти.

8. Ответ. 36.

Если первое слагаемое равно 1, то сумма второго и третьего слагаемых равна 9. А число 9 можно представить восемью способами в виде суммы двух слагаемых:

$$\begin{aligned} 9 &= 1 + 8 = 2 + 7 = 3 + 6 = 4 + 5 = \\ &= 5 + 4 = 6 + 3 = 7 + 2 = 8 + 1. \end{aligned}$$

Если первое слагаемое равно 2, то сумма второго и третьего — 8. А число 8 можно представить семью способами в виде суммы двух слагаемых:

$$\begin{aligned} 8 &= 1 + 7 = 2 + 6 = 3 + 5 = 4 + 4 = \\ &= 5 + 3 = 6 + 2 = 7 + 1. \end{aligned}$$

Если первое равно 3, то сумма второго и третьего — 7. А 7 можно представить шестью способами:

$$\begin{aligned} 7 &= 1 + 6 = 2 + 5 = 3 + 4 = \\ &= 4 + 3 = 5 + 2 = 6 + 1. \end{aligned}$$

Если первое равно 4, то сумма второго и третьего — 6. А 6 можно представить пятью способами:

$$6 = 1 + 5 = 2 + 4 = 3 + 3 = 4 + 2 = 5 + 1.$$

Если первое равно 5, то сумма второго и третьего — 5. А 5 можно представить четырьмя способами:

$$5 = 1 + 4 = 2 + 3 = 3 + 2 = 4 + 1.$$

Если первое равно 6, то сумма второго и третьего — 4. А 4 можно представить тремя способами:

$$4 = 1 + 3 = 2 + 2 = 3 + 1.$$

Если первое равно 7, то сумма второго и третьего — 3. А 3 можно представить двумя способами:

$$3 = 1 + 2 = 2 + 1.$$

Если первое равно 8, то сумма второго и третьего — 2. А 2 можно представить лишь одним способом: $2 = 1 + 1$. А так как второе и третье слагаемые

не меньше единицы, то первое не может быть больше восьми.

В итоге получаем, что существует

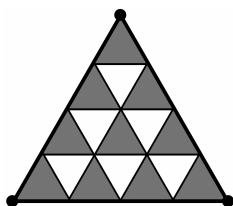
$$8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 36$$

способов представить число 10 в виде суммы трёх натуральных слагаемых.

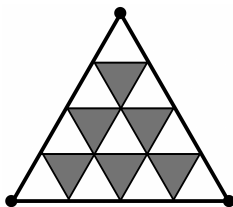
9. Ответ. 27.

Разобьём все возможные треугольники на четыре группы в зависимости от их размеров.

Существует десять треугольников единичного размера «углом вверх»:

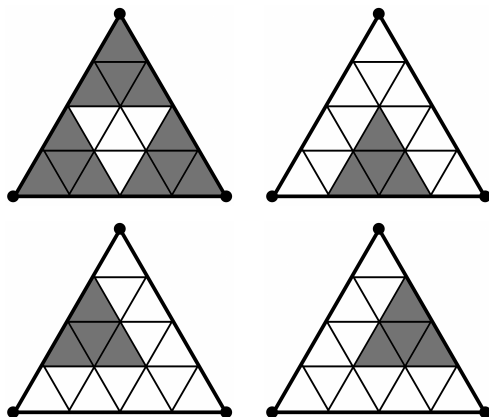


и ещё шесть «углом вниз»:

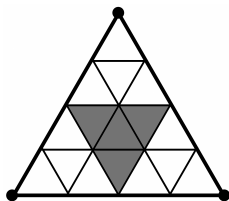


Поэтому всего есть $10 + 6 = 16$ треугольников единичного размера.

Существует шесть треугольников двойного размера «углом вверх»:

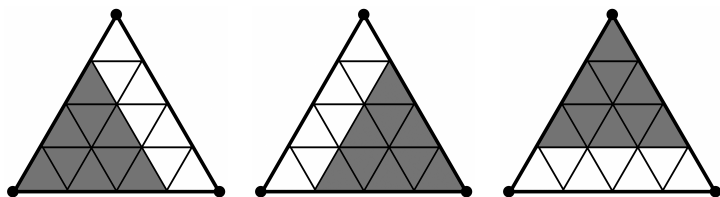


и ещё один «УГЛОМ ВНИЗ»:



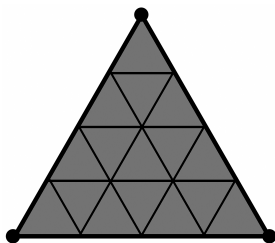
Поэтому всего есть $6 + 1 = 7$ треугольников двойного размера.

Существует три треугольника тройного размера «УГЛОМ ВВЕРХ»:



а «УГЛОМ ВНИЗ» не влезет ни одного.

И существует единственный треугольник четвертого размера:



Итого получаем, что на этой картинке можно выделить

$$16 + 7 + 3 + 1 = 27$$

равносторонних треугольников.

13. **Ответ.** 48.

В слове ЧЕТЫРЁХУГОЛЬНИК есть шесть гласный букв — Е, Ы, Ё, У, О и И и восемь согласных — Ч, Т, Р, Х, Г, Л, Н, К. Поэтому есть $6 \cdot 8 = 48$ способов выбрать одну гласную и одну согласную буквы.

14. **Ответ.** 16.

Существует четыре различных способа войти в школу. И, как бы мы ни вошли, есть четыре способа выйти. Поэтому существует $4 \cdot 4 = 16$ способов войти, а потом выйти из здания школы.

15. **Ответ.** 6000.

Есть $8 \cdot 25 = 200$ способов выбрать пару — конверт и открытка. К каждой такой паре можно подобрать марку 30 различными способами. Значит, всего

$200 \cdot 30 = 6000$ способов купить конверт с открыткой и марку.

16. Ответ. 43.

Есть три группы способов доехать из города A в город B — ехать напрямую в город B , добираться через город C или через город D . В первой группе, очевидно, лишь один способ. Во второй — $4 \cdot 3 = 12$ способов (четыре различных варианта добраться до города C , и каждому из них соответствует по три способа доехать до города B). В третьей группе аналогично получаем $5 \cdot 6 = 30$ способов. В итоге имеем всего $1 + 12 + 30 = 43$ способа.

17. Ответ. 132.

Перепутать можно лишь те дни, у которых число может быть номером месяца, то есть когда оно принимает значение от 1 до 12. Значит, всего есть $12 \cdot 12 = 144$ дня в году, когда число можно принять за месяц. Но те дни, у которых число и месяц записываются одинаково, понимаются однозначно. А такой день есть в каждом месяце. Поэтому в году есть $144 - 12 = 132$ дня, дату которых нельзя про-
нять однозначно.

21. Ответ. $3^9 = 19\,683$.

Пронумеруем все клетки таблицы от одного до девяти. Первую клетку можно покрасить в один из трёх цветов. Для любой покраски первой клетки есть три способа покрасить вторую. То есть существует $3 \cdot 3 = 9$ способов покрасить первые две клетки. Продолжая так же рассуждать, получим, что есть

$3^9 = 19\,683$ способов покрасить каждую клетку таблицы 3×3 в один из трёх цветов.

22. **Ответ.** $5^7 = 78\,125$.

На первом месте может стоять любая из пяти нечётных цифр — 1, 3, 5, 7 или 9. Какая бы ни была первая цифра, есть пять вариантов для второй цифры. И так далее. Значит, всего существует $5^7 = 78\,125$ семизначных чисел, все цифры которых нечётны.

23. **Ответ.** $3^5 = 243$.

Для первой монеты есть три варианта того, куда её можно положить. Куда бы мы ни положили первую, у нас есть три варианта положить вторую. И так далее. В итоге получаем, что существует $3^5 = 243$ способа разложить пять монет по трём карманам.

24. **Ответ.** 1364.

Так как в алфавите всего четыре буквы, то существует ровно четыре однобуквенных слова.

В слове из двух букв первую букву можно выбрать четырьмя способами, и для любой первой буквы существует четыре способа выбрать вторую. Поэтому всего $4 \cdot 4 = 16$ двухбуквенных слов.

Аналогично получаем, что существует $4^3 = 64$ слова из трёх букв, $4^4 = 256$ слов из четырёх букв, и $4^5 = 1024$ слова из пяти букв.

В итоге получаем, что можно составить

$$4 + 16 + 64 + 256 + 1024 = 1364$$

слова из букв этого алфавита.

25. Ответ. 31.

Каждого друга можно либо позвать, либо не позвать. Получается, что всего есть $2^5 = 32$ варианта выбрать группу из пяти друзей. Но среди этих 32 вариантов есть «группа», в которой нет ни одного друга (если получилось так, что мы никого не позвали). Но такая группа запрещена условием. Поэтому мальчик сможет так приглашать друзей в течение $32 - 1 = 31$ дня.

28. Ответ. 120.

Цвет для верхней полосы флага можно выбрать шестью разными способами. Если мы выбрали цвет для верхней полосы, то для средней остается пять возможных цветов, а после этого для нижней — четыре различных цвета. Поэтому существует $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ способов сделать такой трёхцветный флаг.

29. Ответ. $33 \cdot 32^4 = 34\,603\,008$.

Первую букву можно выбрать 33 способами. Вторую — уже 32 способами (так как нельзя использовать ту букву, которую мы поставили на первое место). Аналогично, на третье, четвёртое и пятое места могут претендовать также лишь 32 буквы — любая, кроме той, что стоит перед ней. В итоге получаем всего $33 \cdot 32^4 = 34\,603\,008$ допустимых «слов».

30. Ответ. $9 \cdot 5^7 = 703\,125$.

На первом месте может быть любая цифра, кроме нуля. То есть всего есть девять вариантов для первой

цифры. После того как мы выбрали первую цифру, все остальные цифры должны быть той же чётности. Но и чётных, и нечётных цифр есть по пять: чётные — 0, 2, 4, 6 и 8; нечётные — 1, 3, 5, 7 и 9. Поэтому после выбора первой цифры у нас остаётся по пять вариантов на каждую из оставшихся позиций. Значит, всего есть $9 \cdot 5^7 = 703\,125$ восьмизначных чисел, все цифры которых имеют одинаковую чётность.

31. Ответ. $9 \cdot 10^8 \cdot 5 = 4\,500\,000\,000$.

Первую цифру числа можно выбрать девятью способами — это может быть любая цифра, кроме нуля. Вторую, третью, ..., девятую цифры можно выбрать десятью способами каждую (на эти места можно ставить любые цифры). Теперь посмотрим на варианты для последней цифры. Если сумма первых девяти цифр чётна, то на последнее место можно поставить только нечётную цифру (пять возможностей — 1, 3, 5, 7 или 9). Если же сумма первых девяти цифр нечётна, то на последнее место можно поставить только чётную цифру (пять возможностей — 0, 2, 4, 6 или 8). То есть в любом случае у нас есть пять претендентов на последнее место. Отсюда получаем ответ — десятизначных чисел с нечётной суммой цифр

$$9 \cdot 10^8 \cdot 5 = 4\,500\,000\,000$$

штук.

32. Ответ. 200.

Разберём отдельно три случая — когда в стопке получится две книги, когда получится три книги, и когда четыре.

Если мы делаем стопку из двух книг, то в качестве нижней мы можем взять любую из пяти, и после этого у нас остаётся четыре кандидатуры на верхнюю книгу. Итого получается, что существует $5 \cdot 4 = 20$ способов выбрать две книги и сложить их в стопку.

Если мы делаем стопку из трёх книг, то в качестве нижней мы можем взять любую из пяти, после этого у нас остаётся четыре кандидатуры на среднюю книгу, а потом — три варианта для верхней книги. Итого получается, что существует $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ способов выбрать три книги и сложить их в стопку.

Если мы делаем стопку из четырёх книг, то в качестве нижней мы можем взять любую из пяти, после этого у нас остаётся четыре кандидатуры на вторую книгу, а потом — три варианта третьей книги и два варианта для верхней. Итого получается, что существует $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$ способов выбрать четыре книги и сложить их в стопку.

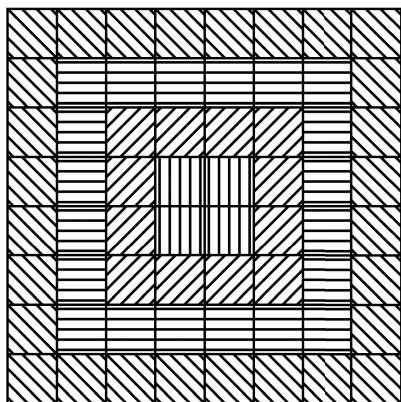
Складывая ответы для этих трёх случаев, получаем, что существует





$$20 + 60 + 120 = 200$$

способов выбрать от двух до четырёх книг и сложить их в стопку.

35. Ответ. 2576.

Заметим, что ферзь бьёт все поля, которые бьют слон и ладья, а значит (см. задачи 33 и 34), ферзь бьёт на 14 полей больше, чем слон, стоящий на том же месте. Раскрасим доску так же, как в задаче 34:



Тогда аналогичными рассуждениями получаем, что если чёрный ферзь стоит на одном из 28 полей , то для белого ферзя остаётся $56 - 14 = 42$ поля. Если чёрный ферзь на одном из 20 полей , то у белого ферзя остаётся $54 - 14 = 40$ полей. Если он стоит на одном из 12 полей , то у белого — $52 - 14 = 38$ полей. Если же чёрный ферзь стоит на одном из четырёх полей , то у белого ферзя остаётся $50 - 14 = 36$ возможных полей.

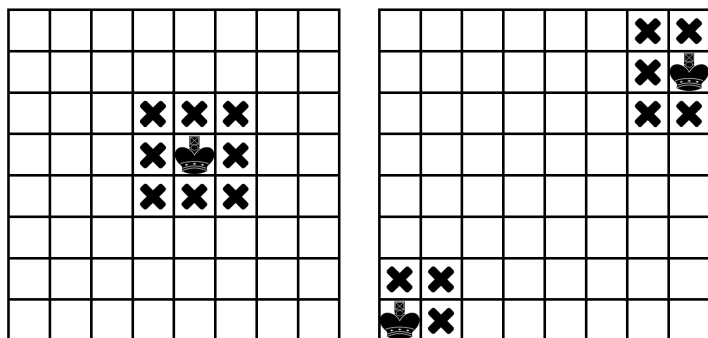
Итого получаем, что существует

$$28 \cdot 42 + 20 \cdot 40 + 12 \cdot 38 + 4 \cdot 36 = 2576$$

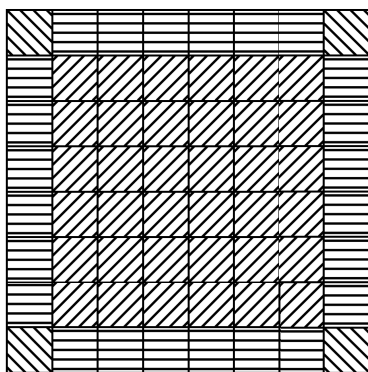
способов поставить на шахматную доску чёрного и белого ферзя так, чтобы они не били друг друга.




36. Ответ. 3612.

Количество полей, занимаемых чёрным королём, зависит от того, где он стоит:



Если он стоит в углу, то занимает четыре клетки, если у края, но не в углу, — шесть клеток, а если не у края, то девять клеток. Поэтому, раскрасив доску так, как показано на рисунке

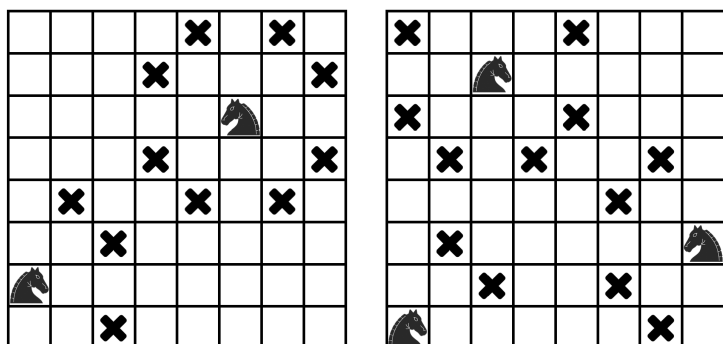


получим, что если чёрный король стоит на поле  (их всего четыре), то для белого короля остаётся $64 - 4 = 60$ полей, если на поле  (их 24 штуки), то у белого есть $64 - 6 = 58$ полей, если же чёрный король стоит на поле  (их всего 36), то для белого короля остаётся $64 - 9 = 55$ полей.

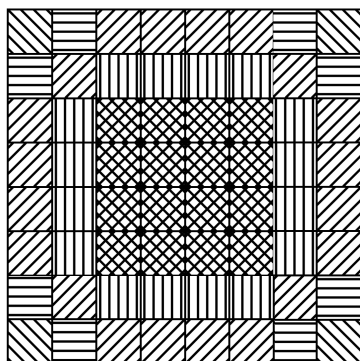
Таким образом, всего существует $4 \cdot 60 + 24 \cdot 58 + 36 \cdot 55 = 3612$ способов поставить на шахматную доску чёрного и белого короля так, чтобы полученная ситуация не противоречила правилам игры в шахматы.






37. Ответ. 3696.

В зависимости от расположения чёрного коня он может занимать (включая то, на котором он стоит) три, четыре, пять, семь или девять полей.



Заштрихуем все поля шахматной доски пятью разными способами:



Заштрихуем  поля, стоя на которых, чёрный конь занимает три поля (их всего четыре); заштрихуем  поля, стоя на которых, конь занимает четыре поля (их восемь); заштрихуем  поля, стоя на которых, он занимает пять полей (их 20); заштрихуем  поля, стоя на которых, он занимает семь полей (их 16); заштрихуем  поля, стоя на которых, он занимает девять полей (их тоже 20).

Тогда мы получаем, что существует

$$\begin{aligned}
 & 4 \cdot (64 - 3) + 8 \cdot (64 - 4) + 20 \cdot (64 - 5) + \\
 & \quad + 16 \cdot (64 - 7) + 16 \cdot (64 - 9) = \\
 & = 4 \cdot 61 + 8 \cdot 60 + 20 \cdot 59 + 16 \cdot 57 + 16 \cdot 55 = 3696
 \end{aligned}$$

способов поставить на шахматную доску чёрного и белого коня так, чтобы они не били друг друга.

40. Ответ. 72.

На место водителя может сесть один из трёх человек, у которых есть права. После этого остальные четыре человека могут быть размещены на четырёх местах $4! = 24$ способами. Таким образом, всего существует $3 \cdot 24 = 72$ способа размещения в машине пяти человек, из которых только трое имеют права.

41. Ответ. 24.

Давайте наденем на одну из девушек красную шапочку, чтобы отличать её от остальных. Затем пронумеруем всех девушек, следующих за ней, против часовой стрелки — ту, которая по правую руку от Красной Шапочки, назовем *первой*, следующую — *второй* и так далее. Тогда в качестве первой девушки

может быть любая из четырёх (ею могут быть все, кроме самой Красной Шапочки), на втором месте может быть любая из трёх оставшихся и так далее. В итоге получаем $4! = 24$ способа для пяти девушек встать в хоровод.

42. **Ответ.** $2 \cdot 5! \cdot 5! = 28\,800$.

Мысленно раскрасим кресла через одно — чёрное, белое, чёрное, белое, и так далее. Тогда либо все мальчики сидят на чёрных креслах, а все девочки на белых, либо, наоборот, мальчики сидят на белых, а девочки — на чёрных. Если мальчики сидят на чёрных местах, тогда есть $5!$ способов их рассадить на эти места и $5!$ способов рассадить девочек на оставшиеся белые места — итого $5! \cdot 5!$. Во втором случае (когда на чёрных креслах сидят девочки), получаем также $5! \cdot 5!$ способов рассадки. А значит, всего существует

$$2 \cdot 5! \cdot 5! = 2 \cdot 120 \cdot 120 = 28\,800$$

различных способов рассадить пять мальчиков и пять девочек за круглый стол с десятью креслами так, чтобы мальчики и девочки чередовались.

43. **Ответ.** $2 \cdot 6! = 1440$.

Давайте сначала выстроим очередь без Ани. Тогда у нас всего шесть человек, которых можно переставить между собой $6!$ способами. В каждую из таких очередей Аню можно поставить лишь двумя способами — либо *перед* Катей, либо *после* Кати. В итоге получаем $2 \cdot 6! = 2 \cdot 720 = 1440$ очередей, удовлетворяющих условию.

48. **Ответ.** $\frac{13!}{16}.$

Так как в слове всего 13 букв и при этом каждая из букв К, О, И и А входят в слово по два раза, то всего получится $\frac{13!}{2! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 2!} = \frac{13!}{16}$ различных слов.

49. **Ответ.** $\frac{8!}{2! \cdot 2! \cdot 2!} = 5040.$

По сути, нас просят посчитать, сколько различных слов можно получить из «КФССкклл». Мы знаем,

что их $\frac{8!}{2! \cdot 2! \cdot 2!} = \frac{8!}{8} = 7! = 5040.$

50. **Ответ.** $\frac{32!}{12! \cdot 12! \cdot 8!}.$

На шахматной доске $8 \times 8 = 64$ поля, половина из которых чёрные. Пронумеруем все 32 чёрных поля. На каждое из этих полей можно положить белую шашку, чёрную шашку или оставить пустым. По сути, у нас есть слово из 32 букв, в котором 12 букв «белая шашка», 12 букв «чёрная шашка» и 8 букв «пустое поле».

Мы знаем, что количество таких слов равно

$$\frac{32!}{12! \cdot 12! \cdot 8!}.$$

51. **Ответ.** $\frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1) \cdot (3n^2 + 3n - 1)}{30}.$

Выпишем:

$$\begin{array}{ccccccc} (1+1)^5 & + & (2+1)^5 & + & (3+1)^5 & + & \dots & + & (n+1)^5 \\ 1^5 & + & 2^5 & + & 3^5 & + & \dots & + & n^5. \end{array}$$

Заметим, что:

$$\begin{aligned} (k+1)^5 - k^5 &= (k^5 + 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k + 1) - k^5 = \\ &= 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k + 1. \end{aligned}$$

Значит, после вычитания из верхней строчки нижней получится

$$\begin{aligned}
 & (5 \cdot 1^4 + 10 \cdot 1^3 + 10 \cdot 1^2 + 5 \cdot 1 + 1) + \\
 & + (5 \cdot 2^4 + 10 \cdot 2^3 + 10 \cdot 2^2 + 5 \cdot 2 + 1) + \\
 & + \dots + (5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 5n + 1) = \\
 & = 5 \cdot (1^4 + 2^4 + \dots + n^4) + 10 \cdot (1^3 + 2^3 + \dots + n^3) + \\
 & + 10 \cdot (1^2 + 2^2 + \dots + n^2) + \\
 & + 5 \cdot (1 + 2 + \dots + n) + \underbrace{1 + 1 + 1 + \dots + 1}_{n \text{ раз}} = \\
 & = 5 \cdot (1^4 + 2^4 + \dots + n^4) + 10 \cdot \frac{n^2 \cdot (n+1)^2}{4} + \\
 & + 10 \cdot \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6} + 5 \cdot \frac{n \cdot (n+1)}{2} + n.
 \end{aligned}$$

Но, с другой стороны, разность, которую мы посчитали, равна

$$\begin{aligned}
 & (2^5 + 3^5 + 4^5 + \dots + (n+1)^5) - \\
 & - (1^5 + 2^5 + 3^5 + \dots + n^5) = (n+1)^5 - 1^5 = \\
 & = (n^5 + 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 5n + 1) - 1 = \\
 & = n^5 + 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 5n.
 \end{aligned}$$

В итоге мы получили, что

$$\begin{aligned}
 & 5 \cdot (1^4 + 2^4 + \dots + n^4) + 10 \cdot \frac{n^2 \cdot (n+1)^2}{4} + \\
 & + 10 \cdot \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6} + 5 \cdot \frac{n \cdot (n+1)}{2} + n = \\
 & = n^5 + 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 5n.
 \end{aligned}$$

То есть

$$\begin{aligned}
 & 5 \cdot (1^4 + 2^4 + \dots + n^4) = \\
 & = n^5 + 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 4n - \\
 & - \frac{5 \cdot n^2 \cdot (n+1)^2}{2} - \frac{5 \cdot n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{3} - \frac{5 \cdot n \cdot (n+1)}{2}.
 \end{aligned}$$

Заметим, что

$$\begin{aligned}
 & n^5 + 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 4n = \\
 & = n \cdot (n^4 + 5n^3 + 10n^2 + 10n + 4) = \\
 & = n \cdot (n^3 \cdot (n+1) + 4 \cdot n^2 \cdot (n+1) + \\
 & + 6 \cdot n \cdot (n+1) + 4(n+1)) = \\
 & = n \cdot (n+1) \cdot (n^3 + 4n^2 + 6n + 4).
 \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned}
 & 5 \cdot (1^4 + 2^4 + \dots + n^4) = \\
 & = n \cdot (n+1) \cdot \left(n^3 + 4n^2 + 6n + 4 - \frac{5 \cdot n \cdot (n+1)}{2} - \frac{5(2n+1)}{3} - \frac{5}{2} \right) = \\
 & = n \cdot (n+1) \cdot \frac{6(n^3 + 4n^2 + 6n + 4) - 15 \cdot n \cdot (n+1) - 10(2n+1) - 15}{6} = \\
 & = n \cdot (n+1) \cdot \frac{6n^3 + 9n^2 + n - 1}{6}.
 \end{aligned}$$

Значит,

$$1^4 + 2^4 + \dots + n^4 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (6n^3 + 9n^2 + n - 1)}{30}.$$

Те, кто уже умеет раскладывать многочлены на множители, могут показать, что

$$\begin{aligned}
 & 6n^3 + 9n^2 + n - 1 = \\
 & = (2n+1) \cdot (3n^2 + 3n - 1),
 \end{aligned}$$

и получить чуть более удобную формулу

$$1^4 + 2^4 + \dots + n^4 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1) \cdot (3n^2 + 3n - 1)}{30},$$

но большого смысла в этом нет.

52. **Ответ.** $C_{10}^2 = 45$.

Существует $C_{10}^2 = \frac{10 \cdot 9}{2} = 45$ способов выбрать два карандаша из десяти имеющихся различных карандашей.

53. **Ответ.** $C_{20}^3 = 1140$.

Так как никакие три точки не лежат на одной прямой, то любые три точки образуют треугольник. Поэтому существует

$$C_{20}^3 = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{3!} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{6} = 20 \cdot 19 \cdot 3 = 1140$$

треугольников с вершинами в этих 20 точках.

54. **Ответ.** $C_{25}^4 = 12\,650$.

Существует

$$C_{25}^4 = \frac{25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22}{4!} = \frac{25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22}{24} = 25 \cdot 23 \cdot 22 = 12\,650$$

способов назначить дежурными четырёх человек из класса, в котором учатся 25 школьников.

57. **Ответ.** 600 нолей.

Воспользуемся формулой бинома Ньютона:

$$(2 + \sqrt{5})^{1001} = 2^{1001} + C_{1001}^1 \cdot 2^{1000} \cdot \sqrt{5} + C_{1001}^2 \cdot 2^{999} \cdot (\sqrt{5})^2 +$$

$$\begin{aligned}
& + \dots + C_{1001}^{1000} \cdot 2 \cdot (\sqrt{5})^{1000} + (\sqrt{5})^{1001} = \\
& = (2^{1001} + C_{1001}^2 \cdot 2^{999} \cdot 5 + C_{1001}^4 \cdot 2^{997} \cdot 5^2 + \dots + C_{1001}^{1000} \cdot 2 \cdot 5^{500}) + \\
& + \sqrt{5} \cdot (C_{1001}^1 \cdot 2^{1000} + C_{1001}^3 \cdot 2^{998} \cdot 5 + \dots + C_{1001}^{999} \cdot 2^2 \cdot 5^{498} + 5^{500}).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \text{Прделаем то же самое с выражением } (2 - \sqrt{5})^{1001}: \\
& (2 - \sqrt{5})^{1001} = 2^{1001} - C_{1001}^1 \cdot 2^{1000} \cdot \sqrt{5} + C_{1001}^2 \cdot 2^{999} \cdot (\sqrt{5})^2 - \\
& - \dots + C_{1001}^{1000} \cdot 2 \cdot (\sqrt{5})^{1000} - (\sqrt{5})^{1001} = \\
& = (2^{1001} + C_{1001}^2 \cdot 2^{999} \cdot 5 + C_{1001}^4 \cdot 2^{997} \cdot 5^2 + \dots + C_{1001}^{1000} \cdot 2 \cdot 5^{500}) - \\
& - \sqrt{5} \cdot (C_{1001}^1 \cdot 2^{1000} + C_{1001}^3 \cdot 2^{998} \cdot 5 + \dots + C_{1001}^{999} \cdot 2^2 \cdot 5^{498} + 5^{500}).
\end{aligned}$$

Мы получили, что

$$(2 + \sqrt{5})^{1001} = n + m\sqrt{5}, \quad (2 - \sqrt{5})^{1001} = n - m\sqrt{5},$$

где n и m — натуральные числа.

Значит, $(2 + \sqrt{5})^{1001} = 2n - (2 - \sqrt{5})^{1001}$. Так как

$$(2 + \sqrt{5}) \cdot (2 - \sqrt{5}) = 2^2 - (\sqrt{5})^2 = 4 - 5 = -1,$$

то

$$(2 - \sqrt{5})^{1001} = -\frac{1}{(2 + \sqrt{5})^{1001}}.$$

Это означает, что $(2 + \sqrt{5})^{1001} = 2n + \frac{1}{(2 + \sqrt{5})^{1001}}$. Но

$$\begin{aligned}
(2 + \sqrt{5})^{1001} & > 4^{1001} = 2^{2002} > (2^{10})^{200} = \\
& = 1024^{200} > (10^3)^{200} = 10^{600}.
\end{aligned}$$

Поэтому $(2 + \sqrt{5})^{1001}$ менее чем на $\frac{1}{10^{600}}$ больше целого числа $2n$. То есть у него как минимум 600 нулей сразу после запятой.

67. Ответ. 512.

Известно, что существует

- C_{10}^1 способов выбрать группу из одного человека;
- C_{10}^3 способов выбрать группу из трёх человек;
- C_{10}^5 способов выбрать группу из пяти человек;
- C_{10}^7 способов выбрать группу из семи человек;
- C_{10}^9 способов выбрать группу из девяти человек.

Значит, всего есть $C_{10}^1 + C_{10}^3 + C_{10}^5 + C_{10}^7 + C_{10}^9$ способов из десяти человек выбрать группу, в которой будет нечётное число человек. Но мы знаем (смотрите задачи 59 и 64), что

$$C_{10}^0 + C_{10}^1 + C_{10}^2 + C_{10}^3 + C_{10}^4 + C_{10}^5 + C_{10}^6 + C_{10}^7 + C_{10}^8 + C_{10}^9 + C_{10}^{10} = 2^{10} = 1024,$$

значит, сумма $C_{10}^1 + C_{10}^3 + C_{10}^5 + C_{10}^7 + C_{10}^9$ равна половине от

$$C_{10}^0 + C_{10}^1 + C_{10}^2 + C_{10}^3 + C_{10}^4 + C_{10}^5 + C_{10}^6 + C_{10}^7 + C_{10}^8 + C_{10}^9 + C_{10}^{10},$$

$$\text{то есть } \frac{1024}{2} = 512.$$

68. Ответ. В два раза.

Можно сослаться на задачу 59, из которой следует, что

$$C_{1001}^0 + C_{1001}^1 + C_{1001}^2 + \dots + C_{1001}^{1001} = 2^{1001},$$

$$C_{1000}^0 + C_{1000}^1 + C_{1000}^2 + \dots + C_{1000}^{1000} = 2^{1000}.$$

И сказать, что $2^{1001} = 2 \cdot 2^{1000}$. Поэтому первая сумма в два раза больше второй.

А можно сослаться на свойства треугольника Паскаля и заметить, что если в 1000-й строчке стоят числа

$$c_0, \quad c_1, \quad c_2, \quad \dots, \quad c_{1000},$$

то в 1001-й строке стоят числа

$$c_0, \quad (c_0 + c_1), \quad (c_1 + c_2), \quad \dots, \quad (c_{999} + c_{1000}), \quad c_{1000},$$

и их сумма равна

$$\begin{aligned} 2c_0 + 2c_1 + 2c_2 + \dots + 2c_{1000} &= \\ &= 2(c_0 + c_1 + c_2 + \dots + c_{1000}). \end{aligned}$$

69. Из формулы бинома Ньютона следует, что

$$\begin{aligned} 1 - 3 \cdot C_{20}^1 + 9 \cdot C_{20}^2 - 27 \cdot C_{20}^3 + \dots + 3^{18} \cdot C_{20}^{18} - 3^{19} \cdot C_{20}^{19} + 3^{20} &= \\ &= (1 - 3)^{20} = (-2)^{20} = 2^{20}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 - 5 \cdot C_{10}^1 + 25 \cdot C_{10}^2 - 125 \cdot C_{10}^3 + \dots + 5^8 \cdot C_{10}^8 - 5^9 \cdot C_{10}^{19} + 5^{10} &= \\ &= (1 - 5)^{10} = (-4)^{10} = 4^{10} = 2^{20}. \end{aligned}$$

70. Из равенства $C_{n+1}^{k+1} = C_n^k + C_n^{k+1}$ следует, что

$$C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k, \quad C_{n-1}^k = C_{n-2}^{k-1} + C_{n-2}^k.$$

Поэтому

$$C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-2}^{k-1} + C_{n-2}^k.$$

Опять заменим $C_{n-2}^k = C_{n-3}^{k-1} + C_{n-3}^k$:

$$C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-2}^{k-1} + C_{n-3}^{k-1} + C_{n-3}^k.$$

И так далее. Через несколько шагов дойдём до равенства

$$C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-2}^{k-1} + \dots + C_k^{k-1} + C_k^k.$$

Но последнее слагаемое равно единице, и вместо него можно написать C_{k-1}^{k-1} , которое также равно единице:

$$C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-2}^{k-1} + \dots + C_k^{k-1} + C_{k-1}^{k-1}.$$

А именно это и нужно было доказать.

71. Ответ. 1.

Искомое выражение очень похоже на выражение из задачи 65, только вместо обычной суммы — знакопеременная. Заменим пока число 1000 на маленькие значения и посмотрим, чему равны аналогичные суммы:

$$C_0^0 = 1;$$

$$C_1^0 = 1;$$

$$C_2^0 - C_1^1 = 0;$$

$$C_3^0 - C_2^1 = 1 - 2 = -1;$$

$$C_4^0 - C_3^1 + C_2^2 = 1 - 3 + 1 = -1;$$

$$C_5^0 - C_4^1 + C_3^2 = 1 - 4 + 3 = 0;$$

$$C_6^0 - C_5^1 + C_4^2 - C_3^3 = 1 - 5 + 6 - 1 = 1;$$

...

Пока явной закономерности не наблюдается, но видно, что всё крутится возле нуля.

Давайте обозначим $S_n = C_n^0 - C_{n-1}^1 + C_{n-2}^2 - C_{n-3}^3 + \dots$, и воспользуемся тем, что

$$C_n^0 = C_{n-1}^0;$$

$$C_{n-1}^1 = C_{n-2}^0 + C_{n-2}^1;$$

$$C_{n-2}^2 = C_{n-3}^1 + C_{n-3}^2;$$

$$C_{n-3}^3 = C_{n-4}^2 + C_{n-4}^3;$$

...

Тогда

$$\begin{aligned} S_n &= C_{n-1}^0 - (C_{n-2}^0 + C_{n-2}^1) + (C_{n-3}^1 + C_{n-3}^2) - (C_{n-4}^2 + C_{n-4}^3) + \dots = \\ &= (C_{n-1}^0 - C_{n-2}^1 + C_{n-3}^2 - C_{n-4}^3 + \dots) - \\ &\quad - (C_{n-2}^0 - C_{n-3}^1 + C_{n-4}^2 - \dots) = \\ &= S_{n-1} - S_{n-2}. \end{aligned}$$

При этом мы знаем, что $S_0 = S_1 = 1$. Поэтому

$$\begin{aligned} S_0 &= 1, S_1 = 1, S_2 = 0, S_3 = -1, S_4 = -1, S_5 = 0, \\ S_6 &= 1, S_7 = 1, S_8 = 0, S_9 = -1, S_{10} = -1, S_{11} = 0, \\ S_{12} &= 1, S_{13} = 1, S_{14} = 0, S_{15} = -1, S_{16} = -1, S_{17} = 0, \end{aligned}$$

...

То есть значения будут повторяться через каждые шесть. Учитывая то, что $1000 = 996 + 4 = 166 \cdot 6 + 4$, получаем

$$C_{1000}^0 - C_{999}^1 + C_{998}^2 - C_{997}^3 + \dots + C_{500}^{500} = \\ = S_{1000} = S_{994} = S_{988} = S_{982} = \dots = S_4 - 1.$$

77. **Ответ.** $C_9^2 = 36$.

Решение первое. Можно заметить, что эта задача эквивалентна задаче 74 про шары, которые раскладывают по ящикам так, чтобы ни один ящик не оказался пустым. Поэтому ответ

$$C_9^2 = \frac{9 \cdot 8}{2} = 36.$$

Решение второе. Но можно решить и по-другому. Давайте сразу дадим каждому по конфете, чтобы у всех была хотя бы одна конфета. Осталось раздать семь конфет. Из них Пете можно дать любое количество от нуля до семи. В каждом из этих восьми случаев посчитаем, сколько существует вариантов количества конфет, которые можно дать Коле:

- если Пете совсем не дали дополнительных конфет, то Коле можно дать любое количество от нуля до семи — восемь вариантов;
- если Пете дали одну конфету, то Коле можно дать любое количество от нуля до шести — семь вариантов;
- ...
- если Пете дали шесть конфет, то Коле можно либо не давать дополнительных конфет, либо дать одну конфету — два варианта;
- если Пете дали семь конфет, то Коле точно уже ничего больше не достанется — один вариант.

Но после того, как Ваня дал сколько-то конфет Пете и Коле, количество дополнительных конфет, которое достанется ему, определяется однозначно.

Итого, получаем, что существует

$$8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 36$$

способов распределить конфеты так, что у каждого была хотя бы одна конфета.

78. **Ответ.** $C_{24}^4 = 10\,626$.

Сравните с задачей 75.

Пусть каждый депутат бросает в урну для голосования белый листок с номером кандидата, за которого он проголосовал. Достанем все листки и упорядочим по номеру кандидата. Получится несколько (возможно, ни одного) листков за первого, несколько за второго и так далее. Чтобы отделить листки каждого из кандидатов от следующего и предыдущего, вложим между ними чёрный листок (если за кого-то никто не проголосовал, положим чёрный листок всё равно). Получится четыре чёрных разделительных листка: всё, что выше первого чёрного листка, — за первого кандидата, всё, что между первым и вторым, — за второго и так далее, всё, что ниже четвёртого, — за пятого кандидата.

Заметим теперь, что положение этих чёрных листков среди всех $20 + 4 = 24$ листков однозначно определяет соответствующий протокол. Значит, всего существует

$$_{24} = \frac{24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21}{4!} = \frac{24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21}{24} = 23 \cdot 22 \cdot 21 = 10\,626$$

возможных протоколов.

79. **Ответ.** $C_{12}^9 = 220$.

Сравните с задачей 76.

Давайте наденем белые обложки на книги, которые мы оставим, и чёрные — на книги, которые собираемся взять. У нас получится такая последовательность из 11 белых и 9 чёрных обложек, что никакие две чёрных обложки не идут подряд. Сколько таких последовательностей? Выставим в ряд все белые обложки. Теперь есть 12 мест, куда можно вставить чёрные обложки, — перед первой белой, перед второй, ..., перед одиннадцатой и после одиннадцатой. Из этих 12 мест нам нужно выбрать любые 9, в которые мы вставим чёрные обложки. Поэтому существует

$$C_{12}^9 = C_{12}^3 = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{6} = 220$$

способов выбрать из 20 книг на полке девять так, чтобы никакие две из выбранных книг не стояли рядом.

80. **Ответ.** $C_8^3 \cdot C_9^4 = 7056$.

Посчитаем, сколько существует способов выложить в ряд три красных и пять зелёных шаров. Это количество равно числу способов из восьми мест выбрать три, на которые мы положим красные шары, то есть C_8^3 . Теперь у нас есть девять мест — между выложенными восьмью шарами, а также слева и справа от них, — куда можно положить синие шары. И из этих девяти мест нужно выбрать четыре — получаем, что существует C_9^4 способа разложить синие шары.

В итоге получается, что существует

$$\begin{aligned} C_8^3 \cdot C_9^4 &= \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3!} \cdot \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{6} \cdot \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{24} = \\ &= (8 \cdot 7) \cdot (9 \cdot 7 \cdot 2) = 56 \cdot 126 = 7056 \end{aligned}$$

способов выложить в ряд три красных, четыре синих и пять зелёных шаров так, чтобы никакие два синих шара не лежали рядом.

81. **Ответ.** $(C_7^2)^3 = 9261$.

Мы знаем (смотрите задачу 75), что существует C_7^2 способов разложить пять одинаковых белых шаров по трём различным ящикам. Как бы мы ни разложили белые шары, существует C_7^2 способов разложить чёрные шары, а после этого C_7^2 способов разложить красные.

Поэтому всего существует

$$(C_7^2)^3 = \left(\frac{7 \cdot 6}{2}\right)^3 = 21^3 = 9261$$

способ разложить эти 15 шаров по трём ящикам.

85. **Ответ.** 1200 и 2970.

Треугольники бывают двух типов: с двумя вершинами на первой прямой и с одной на второй, и наоборот. Из 10 точек выбрать две можно $C_{10}^2 = \frac{10 \cdot 9}{2} = 45$ способами. Поэтому всего существует $45 \cdot 12 = 540$ треугольников первого типа. Аналогично получаем, что существует

$$C_{10}^2 \cdot 10 = \frac{12 \cdot 11}{2} \cdot 10 = 660$$

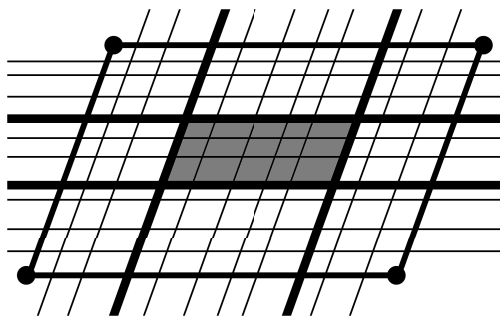
треугольников второго типа. А значит, всего существует 1200 треугольников.

Четырёхугольники же однозначно задаются четырьмя вершинами, две из которых на первой прямой и ещё две — на второй. Значит, всего различных четырёхугольников

$$C_{10}^2 \cdot C_{12}^2 = \frac{10 \cdot 9}{2} \cdot \frac{12 \cdot 11}{2} = 45 \cdot 66 = 2970.$$

86. **Ответ.** $(C_{12}^2)^2 = 4356.$

Чтобы задать параллелограмм, надо выбрать по две прямые в каждом направлении.



В каждом направлении есть двенадцать прямых — десять прямых в ряду и две стороны параллелограмма.

Существует $C_{12}^2 = \frac{12 \cdot 11}{2} = 66$ способов выбрать пару прямых в каждом направлении. Поэтому всего в образовавшейся сетке можно выделить $66 \cdot 66 = 4356$ различных параллелограммов.

87. **Ответ.** 4951.

Решение первое. У треугольника могут быть либо все вершины на разных сторонах, либо две вершины на одной стороне, а третья — на какой-то другой. Рассмотрим четыре случая.

Если все вершины на разных сторонах, то существует 10 способов выбрать вершину на стороне AB , 11 способов выбрать вершину на стороне BC и 12 способов на стороне AC . Поэтому существует $10 \cdot 11 \cdot 12 = 1320$ треугольников с вершинами на разных сторонах.

Если две вершины на стороне AB , то существует C_{10}^2 способов их выбрать и $11 + 12 = 23$ способа выбрать третью вершину. Поэтому существует

$$C_{10}^2 \cdot 23 = \frac{10 \cdot 9}{2} \cdot 23 = 45 \cdot 23 = 1035$$

треугольников с двумя вершинами на стороне AB .

Аналогично, существует

$$C_{11}^2 \cdot (10 + 12) = \frac{11 \cdot 10}{2} \cdot 22 = 55 \cdot 22 = 1210$$

треугольников с двумя вершинами на стороне BC и

$$C_{12}^2 \cdot (10 + 11) = \frac{12 \cdot 11}{2} \cdot 21 = 66 \cdot 21 = 1386$$

треугольников с двумя вершинами на стороне AC .

В итоге получаем, что существует

$$1320 + 1035 + 1210 + 1386 = 4951$$

треугольник с вершинами в отмеченных точках.

Решение второе. Существует C_{33}^3 способа выбрать три точки из $10 + 11 + 12 = 33$ отмеченных. При этом

треугольник образуется во всех случаях, кроме тех, когда все три точки лежат на одной стороне треугольника.

Существует C_{10}^3 способа выбрать три точки на стороне AB , C_{11}^3 способа выбрать три точки на стороне BC и C_{12}^3 способа выбрать три точки на стороне AC . Поэтому существует

$$\begin{aligned} C_{33}^3 - C_{10}^3 - C_{11}^3 - C_{12}^3 &= \\ &= \frac{33 \cdot 32 \cdot 31}{6} - \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{6} - \frac{11 \cdot 10 \cdot 9}{6} - \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{6} = \\ &= 11 \cdot 16 \cdot 31 - 10 \cdot 3 \cdot 4 - 11 \cdot 5 \cdot 3 - 2 \cdot 11 \cdot 10 = \\ &= 5456 - 120 - 165 - 220 = 4951 \end{aligned}$$

треугольник с вершинами в отмеченных точках.

88. Ответ. 210.

Так как, по условию, никакие три диагонали не пересекаются в одной точке, то количество точек пересечения диагоналей равно количеству пар пересекающихся диагоналей.

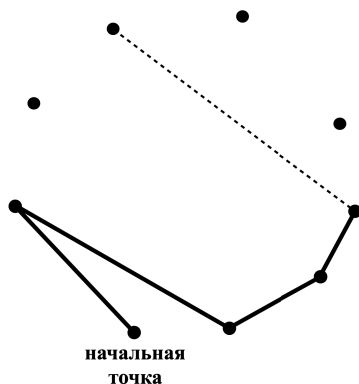
Каждой паре пересекающихся диагоналей можно поставить в соответствие четвёрку вершин десятиугольника — концы этих диагоналей. И наоборот, для любых четырёх вершин существует ровно одна пара пересекающихся диагоналей с концами в этих вершинах. Таким образом, количество пар пересекающихся диагоналей равно количеству способов выбрать четыре вершины из десяти, то есть

$$C_{10}^4 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{24} = 210.$$

89. **Ответ.** 5760.

Незамкнутая восьмизвенная ломаная содержит девять вершин. Значит, одна из десяти отмеченных точек не будет участвовать. Эту точку можно выбрать десятью способами. После того, как мы выбрали, какая точка не участвует, задача свелась к подсчёту количества ломаных на оставшихся девяти вершинах.

Пусть мы начали из какой-то отмеченной точки и начали рисовать ломаную. Заметим, что если мы в какой-то момент проведём такое звено, что пока не использованные точки окажутся разделены этим звеном на две группы по разные стороны от него, то звено, которое впоследствии будет соединять точки из разных групп, пересечёт это звено.



Но мы хотим получить несамопересекающуюся ломаную. Значит, каждую следующую вершину можно выбирать только из соседних к уже выбранным.

Начнём строить ломаную. Начальную точку можно выбрать девятью способами. Вторую — двумя способами — одну из соседних. Третью — тоже двумя — одну из соседних к уже двум отмеченным.

И так далее. Восьмую — двумя способами. А девятой вершиной ломаной будет последняя из оставшихся. Получается, что таким образом на девяти точках можно нарисовать ломаных

$$9 \cdot 2^7 = 9 \cdot 128 = 1152.$$

Но на самом деле ломаных будет в два раза меньше, потому что каждую ломаную можно нарисовать двумя способами — начиная рисовать либо с одного, либо с другого конца. Поэтому каждую ломаную мы в итоге посчитали дважды, значит, на девяти точках существует $\frac{1152}{2} = 576$ незамкнутых несамопересекающихся восьмизвенных ломаных.

Вспомнив, что существует десять способов от первоначальных десяти отмеченных точек оставить девять, получаем окончательный ответ — существует $10 \cdot 576 = 5760$ незамкнутых несамопересекающихся восьмизвенных ломаных с вершинами в десяти отмеченных точках.

100. Ответ. 180 000.

Вспомним, что делимость на пять зависит только от последней цифры — число делится на пять тогда и только тогда, когда оно заканчивается на 0 или 5. Поэтому на первом месте может стоять любая цифра, кроме нуля. На втором, третьем, четвёртом и пятом — любые цифры. А на последнем — только 0 или 5. Поэтому всего существует

$$9 \cdot 10^4 \cdot 2 = 180\,000$$

шестизначных чисел, делящихся на пять.

101. **Ответ.** 33.

Число делится на 15 тогда и только тогда, когда оно делится на три и на пять. Число делится на три, если его сумма цифр делится на три; число делится на пять, если его последние цифры — 0 или 5. Но первая и последняя цифры у числа-палиндрома одинаковы, поэтому последняя цифра не может равняться нулю. Это означает, что пятизначные числа-палиндромы, кратные 15, имеют вид $5ABA5$, и при этом сумма цифр

$$5 + A + B + A + 5 = 2A + B + 10$$

должна делиться на три.

Понятно, что на делимость на три влияют лишь остатки при делении на три цифр A и B . Если цифра A делится на три, то у цифры B должен быть остаток 2; если у A остаток 1 при делении на три, то B должно делиться на три; а если у A остаток 2, то у B должен быть остаток 1. А значит,

- если $A = 0, 3, 6$ или 9 , тогда $B = 2, 5$ или 8 — всего $3 \cdot 4 = 12$ вариантов;
- если $A = 1, 4$ или 7 , тогда $B = 0, 3, 6$ или 9 — всего $3 \cdot 4 = 12$ вариантов;
- если $A = 2, 5$ или 8 , тогда $B = 1, 4$ или 7 — всего $3 \cdot 3 = 9$ вариантов.

Таким образом, всего существует $12 + 12 + 9 = 33$ пятизначных числа-палиндрома, делящихся на 15.

102. **Ответ.** 60.

Разложим число 10 800 на простые множители:

$$10\,800 = 108 \cdot 100 = 27 \cdot 4 \cdot (2 \cdot 5)^2 = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^2.$$

Значит, любой делитель числа 10 800 имеет вид $2^x \cdot 3^y \cdot 5^z$, где $0 \leq x \leq 4$, $0 \leq y \leq 3$, $0 \leq z \leq 2$. То есть x принимает одно из пяти значений — 0, 1, 2, 3 или 4, y — одно из четырёх, а z — одно из трёх.

Поэтому у числа 10 800 всего $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ различных натуральных делителей.

103. **Ответ.** 1120.

Разложим число 16 875 на простые множители. Оно точно делится на 5.

$$16\,875 : 5 = 3375.$$

Это число тоже делится на 5.

$$3375 : 5 = 675.$$

И это делится на 5.

$$675 : 5 = 135.$$

Ещё делим на 5.

$$135 : 5 = 27.$$

Ну а $27 = 3^3$. Таким образом получается, что $16\,875 = 3^3 \cdot 5^4$.

То есть произведение цифр восьмизначного числа должно быть равно $3^3 \cdot 5^4$. Значит, среди наших цифр точно нет чётных цифр и цифры 7. Методом исключения понимаем, что наше число может содержать только цифры 1, 3, 5, 9.

Тогда наше число либо состоит из восьми цифр

5, 5, 5, 5, 3, 3, 3, 1,

либо из цифр

5, 5, 5, 5, 3, 9, 1, 1.

Чтобы понять, сколько существует различных восьмизначных чисел, которые можно получить перестановкой цифр 5, 5, 5, 5, 3, 3, 3, 1, заметим, что каждое такое число можно воспринимать как «слово» из восьми букв, в котором четыре «буквы» 5, три «буквы» 3 и одна «буква» 1. Всего таких «слов» будет

$$\frac{8!}{4! \cdot 3! \cdot 1!} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{3!} = 5 \cdot 7 \cdot 8 = 280.$$

Проделав то же самое для набора цифр 5, 5, 5, 5, 3, 9, 1, 1, получим, что из них можно получить

$$\frac{8!}{4! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 2!} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{2} = 5 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 8 = 840$$

различных восьмизначных чисел.

Значит, всего существует $280 + 840 = 1120$ восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 16 875.

107. Ответ. $5^5 - 5! = 3005$.

Всего существует 5^5 последовательностей из пяти букв. Из них нам не подходят те, где все пять букв различные. А таких последовательностей $5!$, потому что это все возможные перестановки пяти букв этого алфавита.

Поэтому в этом языке существует

$$5^5 - 5! = 3125 - 120 = 3005$$

СЛОВ.

108. **Ответ.** $9 \cdot 10^3 - 9^4 = 2439$.

Всего существует $9 \cdot 10^3 = 9000$ четырёхзначных чисел. Из них нам не подходят те, в записи которых не содержится нуля. А таких чисел 9^4 , потому что на каждой из четырёх позиций может быть любая из девяти цифр от 1 до 9.

Поэтому существует

$$9 \cdot 10^3 - 9^4 = 9000 - 6561 = 2439$$

четырёхзначных чисел, в записи которых содержится хотя бы одна цифра 0.

109. **Ответ.** $9 \cdot 10^4 - 5^5 = 86\,875$.

Всего существует $9 \cdot 10^4 = 90\,000$ пятизначных чисел. Из них нам не подходят те, где все цифры нечётные. А таких чисел 5^5 , потому что на каждой из пяти позиций может быть любая из пяти нечётных цифр.

Поэтому существует

$$9 \cdot 10^4 - 5^5 = 90\,000 - 3125 = 86\,875$$

пятизначных чисел, в записи которых содержится хотя бы одна чётная цифра.

110. **Ответ.** $10^6 - 10 \cdot 9^5 = 409\,510$.

Всего существует 10^6 номеров билетов. Давайте подсчитаем количество номеров, которые не являются счастливыми.

Заметим, что для каждой цифры только одна цифра запрещена в качестве соседней: после 0 не должно быть 5, после 1 — 6, после 2 — 7, после 3 — 8, ..., после 9 не должно быть 4.

Поэтому в качестве первой цифры можно выбрать любую из десяти, в качестве второй можно взять любую, кроме той, которая запрещена, в качестве третьей можно взять снова любую из девяти цифр и так далее. Это означает, что количество номеров, которые не являются счастливыми, равно $10 \cdot 9^5$.

Значит, всего существует

$$\begin{aligned} 10^6 - 10 \cdot 9^5 &= 1\,000\,000 - 10 \cdot 59\,049 = \\ &= 1\,000\,000 - 590\,490 = 409\,510 \end{aligned}$$

счастливых номеров билетов.

112. Ответ. 79.

Если мы вынем $10 + 20 + 24 + 24 = 78$ шаров, то может так оказаться, что это 10 красных, 20 синих, 24 жёлтых и 24 зелёных, и среди них не будет 25 шаров одного цвета. То есть 78 шаров может не хватить. Если же мы вытащим 79 шаров, то либо жёлтых, либо зелёных будет не менее 25 шаров, потому что если и тех и других будет меньше 25, то жёлтых и зелёных суммарно не больше 48 шаров, а красных и синих суммарно не больше 30.

Таким образом, наименьшее количество шаров, которое нужно вынуть из мешка, чтобы среди них обязательно было не менее 25 шаров одного цвета, равно 79.

113. Ответ. 2590.

Для того чтобы пройти из левого верхнего угла в правый нижний, фишке пришлось побывать на каждой из «диагоналей» хотя бы по одному разу.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
101	102	103	104	105	106	107	108	109	110	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120
121	122	123	124	125	126	127	128	129	130	131	132	133	134	135	136	137	138	139	140
141	142	143	144	145	146	147	148	149	150	151	152	153	154	155	156	157	158	159	160
161	162	163	164	165	166	167	168	169	170	171	172	173	174	175	176	177	178	179	180
181	182	183	184	185	186	187	188	189	190	191	192	193	194	195	196	197	198	199	200
201	202	203	204	205	206	207	208	209	210	211	212	213	214	215	216	217	218	219	220
221	222	223	224	225	226	227	228	229	230	231	232	233	234	235	236	237	238	239	240
241	242	243	244	245	246	247	248	249	250	251	252	253	254	255	256	257	258	259	260
261	262	263	264	265	266	267	268	269	270	271	272	273	274	275	276	277	278	279	280
281	282	283	284	285	286	287	288	289	290	291	292	293	294	295	296	297	298	299	300

Суммируя наименьшие числа на «диагоналях», получаем, что искомая сумма не меньше чем

$$\begin{aligned}
 & 1 + 2 + \dots + 19 + 20 + 40 + \dots + 300 = \\
 & = (1 + 2 + \dots + 19) + 20 \cdot (1 + 2 + \dots + 15) = \\
 & = \frac{19 \cdot 20}{2} + 20 \cdot \frac{15 \cdot 16}{2} = \\
 & = 190 + 2400 = 2590.
 \end{aligned}$$

Осталось заметить, что эта оценка достигается, если фишка пройдёт по верхней строке и правому столбцу:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
101	102	103	104	105	106	107	108	109	110	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120
121	122	123	124	125	126	127	128	129	130	131	132	133	134	135	136	137	138	139	140
141	142	143	144	145	146	147	148	149	150	151	152	153	154	155	156	157	158	159	160
161	162	163	164	165	166	167	168	169	170	171	172	173	174	175	176	177	178	179	180
181	182	183	184	185	186	187	188	189	190	191	192	193	194	195	196	197	198	199	200
201	202	203	204	205	206	207	208	209	210	211	212	213	214	215	216	217	218	219	220
221	222	223	224	225	226	227	228	229	230	231	232	233	234	235	236	237	238	239	240
241	242	243	244	245	246	247	248	249	250	251	252	253	254	255	256	257	258	259	260
261	262	263	264	265	266	267	268	269	270	271	272	273	274	275	276	277	278	279	280
281	282	283	284	285	286	287	288	289	290	291	292	293	294	295	296	297	298	299	300

114. **Ответ.** $C_8^4 = 70$.

Из условия следует, что для каждой четвёрки школьников найдётся хотя бы один вопрос, на который они не ответили. С другой стороны, количество школьников, не ответивших на каждый конкретный вопрос, не больше четырёх, потому что любые пять школьников ответили вместе на все вопросы. Значит, для каждой четвёрки школьников можно указать вопрос, на который они не ответили, но любая другая четвёрка ответила. Поэтому количество вопросов не меньше количества четвёрок, которые можно выбрать из восьми человек, то есть

$$C_8^4 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4!} = 70.$$

Если же в тесте ровно 70 вопросов, то мы можем сделать список из всех 70 возможных четвёрок школьников и для каждой четвёрки указать свой

вопрос, на который эта четвёрка не ответила. Тогда условие задачи будет выполнено.

В итоге мы доказали, что вопросов не меньше чем 70 и привели пример, когда в тесте 70 вопросов и условие выполняется. Значит, минимальное количество вопросов — 70.

115. Ответ. 1000.

Всего было отправлено $1000 \cdot 2000 = 2\,000\,000$ запросов на дружбу, а пар на сайте

$$C_{2000}^2 = \frac{2000 \cdot 1999}{2} = 1000 \cdot 1999 = 1\,999\,000.$$

То есть запросов на 1000 больше, чем пар, поэтому внутри хотя бы в 1000 пар было отправлено два запроса. Значит, образовалось не менее 1000 пар друзей.

Покажем, что возможна ситуация, когда образовалась ровно 1000 пар. Расставим всех пользователей для наглядности в вершинах правильного 2000-угольника, и пусть каждый пригласит 1000 следующих за ним по часовой стрелке. Тогда очевидно, что друзьями окажутся только те, кто расположен в противоположных вершинах. А пар противоположных вершин ровно 1000.

119. Ответ. 55.

Обозначим, через b_1, b_2, \dots, b_{10} количество способов, двигаясь по стрелкам, добраться из точки A в точки B_1, B_2, \dots, B_{10} соответственно.

В точку B_3 можно попасть только из точек B_1 и B_2 , причём из каждой из них лишь одним способом. Поэтому $b_3 = b_1 + b_2$. Аналогично получаем, что $b_4 = b_2 +$

$+ b_3, b_5 = b_3 + b_4, \dots, b_{10} = b_8 + b_9$. Осталось заметить, что $b_1 = b_2 = 1$. То есть эти числа образуют последовательность чисел Фибоначчи:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55.$$

Значит, $b_{10} = 55$.

120. **Ответ.** $10^3 \cdot 12^3 = 1\,728\,000$.

Первую букву номера можно выбрать двенадцатью способами, каждую из трёх цифр — десятью, а каждую из двух последних букв — тоже по двенадцатью способами. Поэтому всего в каждом регионе потенциально возможны

$$12 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 12 = 10^3 \cdot 12^3 = 1\,728\,000$$

различных автомобильных номеров.

121. **Ответ.** 125.

Каждый учёный пожал руку пяти коллегам, поэтому всего учёные протянули руку $50 \cdot 5 = 250$ раз. Но в каждом рукопожатии встречаются две руки, поэтому всего было сделано $\frac{250}{2} = 125$ рукопожатий.

122. **Ответ.** 648.

Меридианы делят глобус на 36 «долек». А параллели 17 разрезами делят каждую дольку на 18 частей. Значит, всего получается $36 \cdot 18 = 648$ частей.

123. **Ответ.** 8.

Из неравенства треугольника следует, что самая большая сторона треугольника должна быть меньше суммы двух других. Поэтому самая большая сторона не превосходит девяти.

Переберём возможные варианты.

- Пусть самая большая сторона равна 9. Тогда сумма двух других равна 11, и каждая из них не больше девяти:

$$2 + 9 = 3 + 8 = 4 + 7 = 5 + 6.$$

Всего четыре варианта.

- Пусть самая большая сторона равна 8. Тогда сумма двух других равна 12, и каждая из них не больше восьми:

$$4 + 8 = 5 + 7 = 6 + 6.$$

Всего три варианта.

- Пусть самая большая сторона равна 7. Тогда сумма двух других равна 13, и каждая из них не больше семи. Такое бывает, только если две другие стороны равны 6 и 7.

Самая большая сторона не может быть меньше семи, потому что иначе все стороны не превосходят шести, хотя периметр равен 20.

В итоге получаем, что существует $4 + 3 + 1 = 8$ различных треугольников с целыми сторонами, периметр которых равен 20.

124. Ответ. 330 600.

Очевидно, что прямоугольник однозначно задаётся координатами его левой нижней и правой верхней вершины. Пусть их координаты $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$. При этом

- x_1 — любое натуральное число от 1 до 19 (19 вариантов);
- y_1 — любое натуральное число от 1 до 29 (29 вариант);

- x_2 — любое натуральное число от 21 до 50 (30 вариантов);
- y_2 — любое натуральное число от 31 до 50 (20 вариантов).

Значит, всего существует $19 \cdot 29 = 551$ способ выбрать левую нижнюю вершину и $30 \cdot 20 = 600$ способов выбрать правую верхнюю вершину. Поэтому существует $551 \cdot 600 = 330\,600$ способов выбрать пару таких вершин, а значит, и весь прямоугольник.

125. **Ответ.** $C_6^3 \cdot C_9^3 = 1680$.

Вася может выбрать три книги для обмена

$$C_6^3 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3!} = 20$$

способами, а Ваня может это сделать

$$C_9^3 = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3!} = 84$$

способами.

Таким образом, число возможных обменов равно $20 \cdot 84 = 1680$.

126. **Ответ.** $C_4^2 + 2 \cdot C_4^3 = 14$.

Если мы возьмём обоих взрослых, то останется выбрать ещё двух детей. Это можно сделать C_4^2 способами.

Если мы возьмём лишь одного взрослого, то сначала нужно выбрать, какого именно, — два способа, а потом ещё выбрать трёх детей из четырёх — C_4^3 способов.

Итого получаем, что существует

$$C_4^2 \cdot 2 \cdot C_4^3 = \frac{4 \cdot 3}{2} + 2 \cdot 4 = 6 + 8 = 14$$

способов выбрать четверых людей для похода.

127. **Ответ.** 5151.

Решение первое. Можно просто пересчитать все доминошки.

- С нулём точек есть 101 доминошка: $(0 : 0), (0 : 1), (0 : 2), \dots, (0 : 100)$;
- Не считая тех, что уже посчитаны, с одной точкой есть 100 доминошек: $(1 : 1), (1 : 2), (1 : 3), \dots, (1 : 100)$;
- Не считая тех, что уже посчитаны, с двумя точками есть 99 доминошек: $(2 : 2), (2 : 3), (2 : 4), \dots, (2 : 100)$;
- ...
- Не считая тех, что уже посчитаны, с 99 точками есть две доминошки: $(99 : 100), (100 : 100)$;
- Не считая тех, что уже посчитаны, со ста точками есть лишь одна доминошка: $(100 : 100)$.

Поэтому всего в наборе

$$101 + 100 + 99 + \dots + 2 + 1 = \frac{101 \cdot 102}{2} = 101 \cdot 51 = 5151$$

доминошка.

Решение второе. Всего есть 101 дубль: $(0 : 0), (1 : 1), (2 : 2), \dots, (100 : 100)$. Количество остальных доминошек — это все возможные способы выбрать пару из множества чисел от нуля до 100. Количество таких способов равно C_{101}^2 . Поэтому всего в наборе

$$101 + C_{101}^2 = 101 + \frac{101 \cdot 100}{2} = 101 + 101 \cdot 50 = 5151$$

доминошка.

Решение третье. Разрежем каждую доминошку пополам. Тогда каждое число встречается 102 раза — была 101 доминошка с этим числом, но на одной из

них был дубль. Значит, всего $101 \cdot 102$ половинки. Поэтому всего в наборе

$$\frac{101 \cdot 102}{2} = 101 \cdot 51 = 5151$$

доминошка.

128. Ответ. 5120.

Существует десять способов выбрать семью, представители которой не будут входить в комиссию. После этого для каждой из оставшихся семей существует два способа выбрать одного конкретного представителя.

В итоге получается, что существует $10 \cdot 2^9 = 5120$ способов составить комиссию из девяти человек, удовлетворяющую условию задачи.

129. Ответ. $6! \cdot 5! = 86\,400$.

Пусть шесть девочек встали в очередь. Между каждой парой соседних девочек нужно поставить хотя бы одного мальчика. Но мальчиков всего пять. Значит, между каждой парой соседних девочек нужно поставить ровно одного мальчика. То есть девочки и мальчики в очереди должны чередоваться. Существует $6! = 720$ способов поставить в очередь шесть девочек, и после того как мы их поставили, будет $5! = 120$ способов поставить пять мальчиков в пять промежутков между ними.

В итоге получаем, что для них существует $720 \cdot 120 = 86\,400$ способов выстроиться в очередь.

130. Ответ. 819.

Все девять однозначных натуральных чисел подходят, так как в них не может быть двух одинаковых цифр стоящих рядом.

Первая цифра двузначного числа может быть любой, кроме нуля, — девять вариантов, а вторая — любая, кроме первой, — тоже девять вариантов. Значит, существует $9 \cdot 9 = 81$ двузначное натуральное число, десятичная запись которых не содержит двух одинаковых цифр, стоящих рядом.

Первая цифра трёхзначного числа — любая, кроме нуля, — девять вариантов, вторая — любая, кроме первой, — девять вариантов, а третья — любая, кроме второй, — тоже девять вариантов. Значит, существует $9 \cdot 9 \cdot 9 = 729$ трёхзначных натуральных чисел, десятичная запись которых не содержит двух одинаковых цифр стоящих рядом.

Из натуральных чисел от 1 до 1000 мы не рассмотрели только число 1000, но оно, очевидно, не подходит. Итого получаем, что существует

$$9 + 81 + 729 = 819$$

натуральных чисел от 1 до 1000, десятичная запись которых не содержит двух одинаковых цифр, стоящих рядом.

131. Ответ. $2^8 = 256$.

Между крайними полями есть ещё восемь полей. И для каждого из них нам нужно решить — будем ли мы на нём останавливаться или пропустим это поле. Таким образом, наш маршрут определяется восемью решениями — остановиться или пропустить. Всего существует $2^8 = 256$ наборов из восьми таких решений, а значит, существует 256 способов добраться с крайнего левого поля до крайнего правого.

132. **Ответ.** $\frac{C_{10}^5}{2} = 126$.

Существует C_{10}^5 способов выбрать первую команду. Но как только мы выбрали первую команду, вторая организовалась автоматически. Осталось заметить, что нам не важно, какая из команд будет первой, а какая — второй. Поэтому мы каждое разбиение на две команды посчитали дважды.

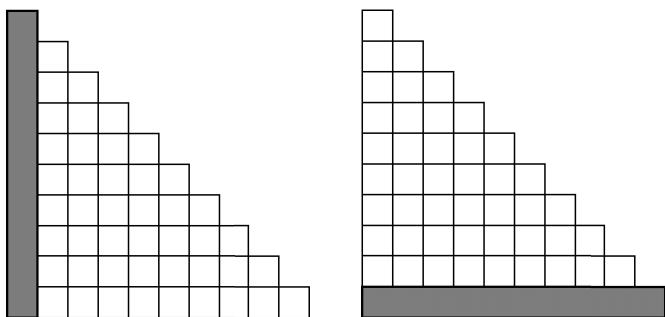
В итоге получаем, что существует

$$\frac{C_{10}^5}{2} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{2 \cdot 5!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{2 \cdot 120} = 9 \cdot 2 \cdot 7 = 126$$

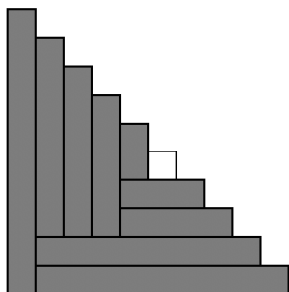
способов разбить десять школьников на две команды по пять человек.

133. **Ответ.** $2^9 = 512$.

Заметим, что прямоугольник 1×10 можно уместить в клетчатую лесенку высотой 10 клеток лишь двумя способами:



После этого остаётся клетчатая лесенка высотой 9 клеток, в которую прямоугольник 1×9 можно уместить лишь двумя способами. И так далее. Когда мы дойдём до прямоугольника 1×1 ,



то для него останется лишь один способ.

В итоге получаем, что существует $2^9 = 512$ способов разрезать лесенку высотой 10 клеток на десять прямоугольников с размерами $1 \times 1, 1 \times 2, 1 \times 3, \dots, 1 \times 10$.

134. **Ответ.** 604 800.

Существует $C_5^3 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3!} = 10$ способов выбрать трёх друзей из пяти.

Поэтому в первый день у мальчика есть десять вариантов для выбора компании для игры в настольную игру. Во второй день, так как компания должна отличаться, остаётся лишь девять вариантов компании. И так далее. Поэтому существует

$$10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 604\,800$$

способов приглашать в течение недели разные тройки друзей.

135. **Ответ.** 3 999 960.

Давайте посчитаем, сколько всего будет чисел, у которых в разряде единиц стоит цифра 1. Количество таких чисел равно числу перестановок цифр 2, 3, 4 и 5 на оставшихся четырёх местах, то есть $4! = 24$ числа.

Аналогично, чисел, заканчивающихся на 2, 3, 4 или 5, будет также по 24.

Значит, разряд единиц внесёт в общую сумму

$$(1 + 2 + 3 + 4 + 5) \cdot 24 = 15 \cdot 24.$$

Рассуждая так же, получим, что вклад десятков в общую сумму будет

$$(10 + 20 + 30 + 40 + 50) \cdot 24 = 150 \cdot 24,$$

вклад сотен будет

$$(100 + 200 + 300 + 400 + 500) \cdot 24 = 1500 \cdot 24,$$

вклад тысяч будет

$$(1000 + 2000 + 3000 + 4000 + 5000) \cdot 24 = \\ = 15\,000 \cdot 24,$$

а вклад десятков тысяч будет

$$(10\,000 + 20\,000 + 30\,000 + 40\,000 + 50\,000) \cdot 24 = \\ = 150\,000 \cdot 24.$$

Значит, вся сумма будет равна

$$(15 + 150 + 1500 + 15\,000 + 150\,000) \cdot 24 = \\ = 15 \cdot (1 + 10 + 100 + 1000 + 10\,000) \cdot 24 = \\ = 360 \cdot 11\,111 = 3\,999\,960.$$

136. Ответ. 35.

После каждого удара двух шаров эти шары как будто меняются местами. Поэтому можно считать, что в момент столкновения шары не сталкиваются, а просто проходят один сквозь другого. В таком случае каждый шар из первой группы пройдёт сквозь каждый шар из второй группы. То есть всего произойдёт $5 \cdot 7 = 35$ столкновений.

137. **Ответ.** $C_{999}^2 = 498\,501$.

Сравните с задачей 74.

Запишем число 1000 как сумму единиц:

$$1000 = \underbrace{1+1+1+1+\dots+1+1+1}_{1000 \text{ единиц}}$$

Если мы представили 1000 как сумму $x + y + z$, то это можно изобразить так:

$$1000 = \underbrace{(1+1+\dots+1)}_{x \text{ единиц}} + \underbrace{(1+1+\dots+1)}_{y \text{ единиц}} + \underbrace{(1+1+\dots+1)}_{z \text{ единиц}}.$$

То есть мы среди 999 знаков плюс выбрали два, и те единицы, что стоят перед первым выбранным знаком плюс, в сумме дают число x , те единицы, которые стоят между двумя знаками плюс, дают в сумме число y , а те, что стоят после второго знака плюс, — число z . Поэтому количество способов представить число 1000 в виде суммы трёх натуральных слагаемых равно количеству способов выбрать два знака плюс из 999. А значит, количество таких представлений равно

$$C_{999}^2 = \frac{999 \cdot 998}{2} = 498\,501.$$

138. **Ответ.** $\frac{10!}{1! \cdot 2! \cdot 3! \cdot 4!} = 12\,600$.

Выстроим наших студентов в ряд и дадим в руки табличку, на которой написано количество мест в комнате, в которую мы собираемся его поселить. Получится какая-то такая последовательность:

$$4332441432.$$

То есть получилось «слово» из десяти «букв», в котором одна буква 1, две буквы 2, три буквы 3 и четыре буквы 4. Количество таких слов равно

$$\frac{10!}{1! \cdot 2! \cdot 3! \cdot 4!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{2 \cdot 6} = 10 \cdot 9 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 5 = 12\,600.$$

Это означает, что существует 12 600 способов расселить десять студентов по этим четырём комнатам.

139. Ответ. 220.

Заметим, что число 4 можно представить в виде суммы натуральных слагаемых лишь следующими способами:

$$4 = 1 + 1 + 1 + 1 = 2 + 1 + 1 = 2 + 2 = 3 + 1.$$

Поэтому нам подходит пять типов чисел. А именно, нам подходят десятизначные числа, в которых

- четыре 1 и шесть 0;
- одна 2, две 1 и семь 0;
- две 2 и восемь 0;
- одна 3, одна 1 и восемь 0;
- одна 4 и девять 0.

Посчитаем, сколько чисел первого типа. Так как число не может начинаться с нуля, то первая цифра — единица. После этого нам нужно выбрать три места из десяти, куда мы ещё поставим единицы, что можно сделать C_9^2 способами. Остальные места заполняем нулями. Значит, существует

$$C_9^3 = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3!} = 3 \cdot 4 \cdot 7 = 84$$

числа первого типа.

Числа второго типа могут начинаться либо с единицы, либо с двойки. Если число начинается с единицы, то далее нам нужно выбрать одно из девяти мест, куда мы поставим вторую единицу, а потом — одно из восьми оставшихся мест, куда мы поставим двойку. Если же число начинается с двойки, то далее нам нужно выбрать два места из десяти, куда мы поставим единицы, это можно сделать C_9^2 способами. Остальные места заполняем нулями. Значит, существует

$$9 \cdot 8 + C_9^2 = 72 + \frac{9 \cdot 8}{2} = 72 + 36 = 108$$

чисел второго типа.

Числа третьего типа могут начинаться только с двойки, и для второй двойки есть девять возможных положений. Значит, существует всего девять чисел третьего типа.

Числа четвёртого типа могут начинаться либо с единицы, либо с тройки, и в каждом из случаев есть по девять возможностей для положения второй ненулевой цифры. Значит, существует всего $9 + 9 = 18$ чисел четвёртого типа.

И наконец, существует лишь одно число пятого типа — 4 000 000 000. Итого получаем, что существует

$$84 + 108 + 9 + 18 + 1 = 220$$

десятизначных чисел, сумма цифр которых равна четырём.

140. **Ответ.** $C_{11}^2 \cdot C_{21}^2 \cdot C_{31}^2 = 5\,370\,750$.

Сравните с задачей 86.

Каждый прямоугольный параллелепипед, который можно выделить, однозначно определяется

три пары параллельных плоскостей, которые содержат его грани.

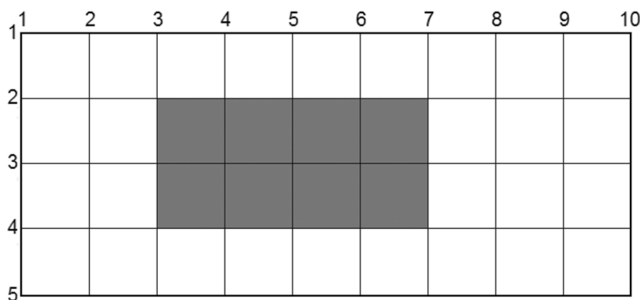
Если прямоугольный параллелепипед $10 \times 20 \times 30$ разбит на единичные кубики, то в нем есть три семейства параллельных плоскостей. В одном из них 11 плоскостей, в другом — 21, а в третьем 31 плоскость. В первом семействе пару плоскостей можно выбрать C_{11}^2 способами, во втором — C_{21}^2 , а в третьем — C_{31}^2 .

Поэтому количество возможных прямоугольных параллелепипедов равно

$$\begin{aligned} C_{11}^2 \cdot C_{21}^2 \cdot C_{31}^2 &= \frac{11 \cdot 10}{2} \cdot \frac{21 \cdot 20}{2} \cdot \frac{31 \cdot 30}{2} = \\ &= 55 \cdot 210 \cdot 465 = 5\,370\,750. \end{aligned}$$

141. **Ответ.** 300.

Пронумеруем горизонтальные и вертикальные линии сетки так, как показано на рисунке.



Будем каждый прямоугольник обозначать двумя парами чисел — номерами горизонтальных и вертикальных линий сетки, ограничивающих его. На-

пример, указанный на рисунке прямоугольник будет $\{2 \leftrightarrow 4; 3 \leftrightarrow 7\}$.

Количество способов выбрать пару горизонтальных линий

$$C_5^2 = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10.$$

При этом пар горизонтальных линий, задающих вертикальные стороны нечётной длины, будет $3 \cdot 2 = 6$, так как одна из линий должна быть нечётной (три варианта), а вторая — чётной (два варианта).

Количество способов выбрать пару вертикальных линий

$$C_{10}^2 = \frac{10 \cdot 9}{2} = 45.$$

При этом пар вертикальных линий, задающих горизонтальные стороны нечётной длины, будет $5 \cdot 5 = 25$.

Количество прямоугольников, содержащих чётное количество клеток, равно количеству всех прямоугольников — $10 \cdot 45 = 450$ штук — минус количество прямоугольников с нечётной площадью — $6 \cdot 25 = 150$ штук. Итого имеем $450 - 150 = 300$ прямоугольников, содержащих чётное количество клеток.

142. Ответ. 30.

Давайте для удобства пронумеруем цвета — первый, второй, ..., шестой. Будем считать, что кубик уже как-то покрашен. Повернём его так, что грань первого цвета окажется нижней, тогда существует две возможности — грань второго цвета оказалась верхней или же она оказалась боковой.

В первом случае повернём кубик так, чтобы грань, окрашенная в третий цвет, оказалась передней, тогда останется ещё три грани, которые должны быть окрашены в четвёртый, пятый и шестой цвета. Выбрать ту грань, которую надо окрасить в четвёртый цвет, можно тремя способами, после этого выбрать ту, которую покрасят в пятый цвет, — двумя, и оставшуюся грань следует окрасить в шестой цвет. То есть в этом случае всего $3 \cdot 2 = 6$ вариантов окрасок кубика. Очевидно, что никакие две из этих раскрасок нельзя совместить поворотом.

Во втором случае повернём кубик так, чтобы грань второго цвета стала передней. Тогда у нас осталось четыре грани и четыре цвета. Опять же, в третий цвет можно окрасить любую из четырёх оставшихся граней, в четвёртый — любую из трёх, которые останутся после окраски в третий цвет, в пятый цвет — одну из двух, и в шестой — последнюю оставшуюся грань. То есть всего $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ способа окраски кубика.

Значит, всего имеется $6 + 24 = 30$ различных вариантов раскраски граней кубика в шесть цветов.

143. Ответ. Поровну.

Посчитаем количество десятизначных чисел, не кратных пяти. На первом месте может стоять любая из девяти ненулевых цифр, на втором, третьем, ..., девятом — любая из десяти цифр, а на последнем — любая, кроме 5 и 0. Всего получаем $9 \cdot 10^8 \cdot 8$ чисел десятизначных чисел, не делящихся на пять.

Теперь посчитаем количество десятизначных чисел, у которых ни первая, ни вторая цифра не являются пятёрками. На первом месте может стоять

любая цифра, кроме 5 и 0, на втором — любая, кроме 5, а на всех остальных — любая из десяти цифр. Получается, что существует $8 \cdot 9 \cdot 10^8$ десятизначных чисел, у которых ни первая, ни вторая цифра слева не являются пятёрками.

Осталось заметить, что $9 \cdot 10^8 \cdot 8 = 8 \cdot 9 \cdot 10^8$.

144. **Ответ.** $\frac{12!}{4! \cdot 4! \cdot 4!} = 34\,650$.

Для того чтобы каждый раз расстояние до стартовой точки увеличивалось, кузнечик может прыгать только в трёх направлениях. Назовем их условно «направо» \rightarrow , «вверх» \uparrow и «вперёд» \nearrow . Чтобы попасть в центр противоположного кубика, нам нужно сделать по четыре прыжка в каждом направлении.

Это означает, что любой маршрут является некоторой последовательностью из двенадцати прыжков:

$$\rightarrow \nearrow \uparrow \uparrow \nearrow \rightarrow \nearrow \nearrow \uparrow \rightarrow \rightarrow \nearrow \uparrow$$

То есть нам нужно понять, сколько существует «слов», в котором по четыре раза встречается каждая из «букв» \rightarrow , \uparrow и \nearrow . Мы знаем, что таких слов всего

$$\begin{aligned} \frac{12!}{4! \cdot 4! \cdot 4!} &= \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = \\ &= 11 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 34\,650. \end{aligned}$$

А значит, и различных маршрутов всего 34 650.

145. **Ответ.** $C_{10}^3 = 120$.

Сравните с задачей 75.

Заметим, что условие «каждая цифра не меньше предыдущей» означает, что как только мы выбрали,

какие цифры входят в наше число, мы однозначно определяем это число. Поэтому нам нужно понять, сколько существует способов решить, сколько из семи цифр равно 1, сколько — 2, сколько — 3 и сколько — 4. А это равносильно задаче о количестве способов разложить семь одинаковых шаров по четырём ящикам с номерами 1, 2, 3 и 4.

Поэтому существует

$$C_{10}^3 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{6} = 120$$

семизначных чисел, в десятичной записи которых могут встретиться только цифры 1, 2, 3 и 4, таких, что каждая цифра не меньше предыдущей.

Можно было и не ссылаться на задачу 75, а, по сути, повторить те же рассуждения. Разделим семь ячеек, в которые мы будем записывать цифры, тремя перегородками, которые разбивают ячейки на четыре блока (некоторые из которых могут оказаться пустыми). В ячейки первого блока пишем цифру 1, в ячейки второго блока — цифру 2 и так далее. Таким образом, семизначных чисел, в десятичной записи которых могут встретиться только цифры 1, 2, 3 и 4, таких, что каждая цифра не меньше предыдущей, равно количеству «слов» из десяти «букв», семь из которых ячейки и три — перегородки. А количество таких слов равно

$$\frac{10!}{7! \cdot 3} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{6} = 120.$$

146. **Ответ.** $4! \cdot C_4^2 \cdot C_6^2 = 2160$.

Сначала выберем четверых человек. Существует C_4^2 способа выбрать двух женщин из четырёх и C_6^2

способа выбрать двух мужчин из шести. Значит, всего $C_4^2 \cdot C_6^2$ способов выбрать четыре человека.

После того как люди выбраны, существует $4!$ способа раздать им четыре должности. Поэтому всего имеется

$$4! \cdot C_4^2 \cdot C_6^2 = 24 \cdot 6 \cdot 15 = 2160$$

способов закрыть четыре вакансии.

147. **Ответ.** $2^9 = 512$.

Существует $2^9 = 512$ способов заполнить угловую таблицу 3×3 :

После этого последняя клетка каждой из первых трёх строк заполняется однозначно — нужно выбрать нуль, если сумма в первых трёх клетках чётная, и единицу — если нечётная. Аналогично понимаем, что последняя клетка каждого из первых трёх столбцов тоже заполняется однозначно.

Значит, существует 512 способов заполнить все клетки таблицы 4×4 , кроме угловой, так, что сумма чисел в каждой из первых трёх строк и в каждом из первых трёх столбцов будет чётной.

Осталось заполнить последнюю клетку так, чтобы в четвёртой строке получилась чётная сумма. Это можно сделать единственным образом — опять нужно выбрать нуль, если сумма в первых трёх клетках чётная, и единицу — если нечётная.

Давайте поймём, почему в последнем столбце сумма обязана при этом стать чётной. Так как сумма чисел в каждой строке чётна, то сумма чисел во всей таблице тоже чётна. Поэтому если сумма чисел в каждом из первых трёх столбцов чётна, то и в последнем она будет чётной.

В итоге мы получили, если мы заполнили угловую таблицу 3×3 всевозможными 512 способами, то дальше она заполняется однозначно.

148. Ответ. 6560.

Сравните с задачей 94.

Посчитаем сначала, сколько всего существует различных раскрасок без учёта поворотов. Каждую из пяти сторон можно раскрасить в один из восьми цветов. Поэтому всего существует $8^5 = 32\,768$ различных раскрасок. Среди этих раскрасок есть ровно восемь одноцветных раскрасок, а так как 5 — простое число, то только одноцветные раскраски при повороте могут перейти сами в себя.

Все остальные $32\,768 - 8 = 32\,760$ неоднородных раскрасок разбиваются на пятёрки, переходящие друг в друга при повороте. Поэтому если мы учтываем, что раскраски переходящие друг в друга при

повороте, являются идентичными, то получаем, что различных неодноразноцветных раскрасок в пять раз меньше: $\frac{32\,760}{5} = 6552$.

Добавив восемь одноцветных раскрасок, получаем, что существует всего $6552 + 8 = 6560$ различных способов раскрасить все стороны правильного пятиугольника, каждую в один из восьми данных цветов, если раскраски, которые переходят друг в друга при повороте, считаются одинаковыми.

149. **Ответ.** 342; $\frac{2^{1000} - 2}{3}$.

Пусть вершины нашего треугольника называются A , B и C , и пусть первоначально кузнечик сидит в вершине A . Обозначим через a_n количество способов вернуться за n прыжков в вершину A , через b_n — попасть за n прыжков в вершину B , а через c_n — попасть за n прыжков в вершину C .

Давайте поймём, что мы знаем про a_n , b_n и c_n . Во-первых, каждый раз кузнечик выбирает одну из двух вершин для прыжка. Поэтому существует всего 2^n маршрутов из n прыжков. Но каждый маршрут заканчивается в одной из вершин A , B или C . Поэтому

$$a_n + b_n + c_n = 2^n.$$

Во-вторых, для того чтобы после $(n + 1)$ -го прыжка оказаться в вершине A , нужно после предыдущего прыжка находиться в вершине B или вершине C . Поэтому $a_{n+1} = b_n + c_n$. Аналогично понимаем, что $b_{n+1} = a_n + c_n$ и $c_{n+1} = a_n + b_n$.

После первого прыжка мы находимся либо в вершине B , либо в вершине C . Поэтому $a_1 = 0$, $b_1 = c_1 = 1$. Значит:

$$a_2 = 1 + 1 = 2, \quad b_2 = 0 + 1 = 1, \\ c_2 = 0 + 1 = 1;$$

$$a_3 = 1 + 1 = 2, \quad b_3 = 2 + 1 = 3, \\ c_3 = 2 + 1 = 3;$$

$$a_4 = 3 + 3 = 6, \quad b_4 = 2 + 3 = 5, \\ c_4 = 2 + 3 = 5;$$

$$a_5 = 5 + 5 = 10, \quad b_5 = 6 + 5 = 11, \\ c_5 = 6 + 5 = 11;$$

$$a_6 = 11 + 11 = 22, \quad b_6 = 10 + 11 = 21, \\ c_6 = 10 + 11 = 21;$$

$$a_7 = 21 + 21 = 42, \quad b_7 = 22 + 21 = 43, \\ c_7 = 22 + 21 = 43;$$

$$a_8 = 43 + 43 = 86, \quad b_8 = 42 + 43 = 85, \\ c_8 = 42 + 43 = 85;$$

$$a_9 = 85 + 85 = 170, \quad b_9 = 86 + 85 = 171, \\ c_9 = 86 + 85 = 171;$$

$$a_{10} = 171 + 171 = 342, \quad b_{10} = 170 + 171 = 341, \\ c_{10} = 170 + 171 = 341.$$

То есть существует 342 способа кузнечiku за десять прыжков вернуться в вершину, из которой он начал.

Пока мы решали задачу для десяти прыжков, мы обнаружили, что у нас всегда $b_n = c_n$ и отличается на единицу от a_n , причём при нечётных n

$$b_n = c_n = a_n + 1,$$

а при чётных n

$$b_n = c_n = a_n - 1.$$

Давайте докажем, что так будет всегда. Пусть при некотором нечётном n

$$a_n = a, \quad b_n = c_n = a + 1,$$

тогда

$$a_{n+1} = b_n + c_n = (a + 1) + (a + 1) = 2a + 2;$$

$$b_{n+1} = a_n + c_n = a + (a + 1) = 2a + 1;$$

$$c_{n+1} = a_n + b_n = a + (a + 1) = 2a + 1,$$

то есть

$$b_{n+1} = c_{n+1} = a_{n+1} - 1.$$

Пусть теперь при некотором чётном n

$$a_n = a, \quad b_n = c_n = a - 1,$$

тогда

$$a_{n+1} = b_n + c_n = (a - 1) + (a - 1) = 2a - 2;$$

$$b_{n+1} = a_n + c_n = a + (a - 1) = 2a - 1;$$

$$c_{n+1} = a_n + b_n = a + (a - 1) = 2a - 1,$$

то есть

$$b_{n+1} = c_{n+1} = a_{n+1} + 1.$$

Таким образом мы доказали, что если для нечётного n справедливо равенство

$$b_n = c_n = a_n + 1,$$

то для следующего чётного $(n + 1)$ будет верно

$$b_{n+1} = c_{n+1} = a_{n+1} - 1,$$

и наоборот.

Пусть $a_{1000} = x$. Мы знаем, что

$$b_{1000} = c_{1000} = a_{1000} - 1, \\ a_{1000} + b_{1000} + c_{1000} = 2^{1000}.$$

То есть $b_{1000} = c_{1000} = x - 1$. Значит,

$$x + (x - 1) + (x - 1) = 2^{1000},$$

$$3x - 2 = 2^{1000},$$

$$x = \frac{2^{1000} - 2}{3}.$$

Таким образом, мы получили, что существует $\frac{2^{1000} - 2}{3}$ способов кузнечiku за тысячу прыжков вернуться в вершину, из которой он начал.

150. **Ответ.** $(C_{10}^5)^2 = 63\,504$.

Заметим, что для того, чтобы вернуться в исходную точку, количество шагов вверх должно быть равно количеству шагов вниз, а количество шагов вправо должно быть равно количеству шагов влево.

Пусть паучок завершил маршрут, сделав за всё время n шагов вверх и m шагов вправо. Тогда мы знаем, что $2n + 2m = 10$, то есть $n + m = 5$.

Сделаем два списка. В первом выпишем номера шагов, на которых паучок шёл вверх или вправо, а во втором — номера шагов, на которых паучок шёл вверх или влево. В каждом списке будет выписано $n + m = 5$ номеров.

Зная эти два списка, путь паучка однозначно восстанавливается:

- если номер шага есть только в первом списке, то этот шаг был сделан вправо;
- если номер шага есть только во втором списке, то этот шаг был сделан влево;

- если номер шага есть в обоих списках, то этот шаг был сделан вверх;
- если номера шага нет ни в одном из списков, то этот шаг был сделан вниз.

Какими бы ни были два списка по пять номеров шагов, путь паучка получится замкнутый. Действительно, количество шагов вправо равно количеству шагов влево — они оба дополняют количество шагов вверх до пяти. А количество шагов вверх равно количеству шагов вниз, потому что если шагов вправо и шагов вверх в сумме пять, то шагов влево и шагов вниз в сумме пять, но мы знаем, что и шагов влево, и шагов вверх в сумме пять.

Таким образом, мы поняли, что каждому замкнутому пути можно взаимно однозначно поставить в соответствие два списка по пять номеров шагов в каждом. Поэтому у паучка есть

$$\left(C_{10}^5\right)^2 = 252^2 = 63\,504$$

различных пути.

БОРИС ТРУШИН БОЛЬШЕ 20 ЛЕТ ПРЕПОДАЕТ МАТЕМАТИКУ ШКОЛЬНИКАМ И СТУДЕНТАМ, ЯВЛЯЯСЬ СОВАТОРОМ УЧЕБНИКОВ ПО АЛГЕБРЕ ДЛЯ 7-9 КЛАССОВ; 6 ЛЕТ ВЕДЕТ ПОПУЛЯРНЫЙ ОДНОИМЕННЫЙ КАНАЛ ПО ОКОЛОШКОЛЬНОЙ МАТЕМАТИКЕ.

ЭТА КНИГА БУДЕТ ПОЛЕЗНА КАК ШКОЛЬНИКАМ, ТАКИ ВЫПУСКНИКАМ

Перед вами откроется удивительный и захватывающий мир КОМБИНАТОРИКИ от простейших задач на перебор вариантов до бинорма Ньютона, треугольника Паскаля и сложных содержательных задач.

Предварительная подготовка не требуется, вас ждут красивые задачи с подробными решениями с интересными авторскими подходами. Все факты изложены с разных сторон, что позволит вам прекрасно ориентироваться в увлекательном путешествии по МАТЕМАТИКЕ!

«Среди разделов математики комбинаторика, несомненно, выделяется своей трудностью. Эта книга – замечательное исключение из этого правила. Борису Трушину удалось изложить основные разделы комбинаторики понятным и очень дружелюбным для читателя языком. Отдельно стоит отметить очень грамотные, удачные подборки задач по каждой теме»

МАКСИМОВ Д.В.,

кандидат физико-математических наук,
доцент ИТМО

ISBN 978-5-04-179678-5



9 785041 796785 >

БОМБОРА
ИЗДАТЕЛЬСТВО

БОМБОРА – лидер на рынке полезных и вдохновляющих книг. Мы любим книги и создаем их, чтобы вы могли творить, открывать мир, пробовать новое, расти. Быть счастливыми. Быть на волне.

© bomboru.ru | @bomborabooks | bomбора (n+1)(n-1)!

$$n+1 = (k+1) + (n-k)$$